த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 563

பகுப்பாய்வு இயல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

[திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது]

ஆசிரியர்

ஏ. எஸ். குமாரசாமி, எம்.ஏ.,

துணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,

புதுக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—January, 1974

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 563

© Tamil Nadu Text Book Society

ANALYSIS

A. S. KUMARASAMY

Price Rs. 10-50

Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
Paramount Printers,
31, Meeran Sahib St.,
Madras-2

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன்றாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'பகுப்பாய்வு இயல்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 563ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 598 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	மெய்யெண்கள் கணித முறை (Real Number System)	...	1
2.	மெய்யெண்கள் கணம்	...	37
3.	ஒழுங்கு வரிசைகள் (Sequences)	...	68
4.	முடிவில்லாத் தொடர் (Infinite Series)	...	160
5.	சார்புகளின் எல்லைகள் (Limits of Functions)	...	293
6.	சார்புகளின் தொடர்ச்சி (Continuity of Functions)	...	334
7.	வரம்புள்ள மாறல் சார்புகள் (Functions of Bounded Variation)	..	388
8.	வகையிடல் (Differentiation)	...	400
9.	பலமாறிச் சார்புகள் (Functions of Several Variables)	...	487
	மேற்கோள் நூற்பட்டியல்	...	515
	கலைச்சொற்கள்	...	516

1. மெய்யெண்கள் கணிதமுறை

(Real Number System)

1·1. முன்னுரை

"ஒருங்கல்" (Convergence), "தொடர்ச்சி" (Continuity), என்பவை பகுப்பாய்வு இயலின் இரு அடிப்படைத் தத்துவங்களாவன.

"வகையிடல்" (Differentiation), "தொகையிடல்" (Integration) என்பவை பகுப்பாய்வு இயலில் அடிப்படைச் செயலிகள். இவற்றை ஐயமற அறிய வேண்டுமானல் செவ்விய வரையறைக் (rigorous definition)குட்பட்ட மெய்யெண்களின் தத்துவத்தை ஆழ்ந்து படிக்க வேண்டும்.

1·2. இயற்கை எண்கள் (Natural Numbers)

இத்தாலிய கணித நிபுணன் கையுஸெப்பெ பியானோ (Giuseppe Peano, 1858—1932) என்பவர் மூன்று அடிக்கோள் உண்மைகளைக் (postulates) கூறினர். அவையாவன :

N என்பது இயற்கை எண்கள் கணம் என்ருல்

(1) N-ன் ஒரு உறுப்பை 1 என்று குறிக்கலாம்.

(2) N-ல் 1-லிருந்து வேறுபட்ட எல்லா உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் M என்ருல், N-லிருந்து M-க்கு ஒன்றுக்கொன்ருன முழுக் கோர்த்தல் இருக்கிறது. $n \in N$-ன் "எதிர் உரு"விற்கு n-ன் அடுத்த எண் (Successor) என்று பெயர். இதனை n^* என்க.

$S \subseteq N$, $1 \in S$ என்க. S-ல் n இருந்தால் S-ல் n^*-ம் உள்ளது என்ருல் $S=N$.

இந்த அடிக்கோள்களைக் கொண்டு, கூட்டல் $+$ (addition), பெருக்கல் $(\cdot)$ (multiplication), $<$ என்ற செயலிகளைக் கொண்டு

இயற்கை எண்கள் முறையை அமைக்கலாம். $<$-ன் செயல் ஆவது இயற்கை எண்களை வரிசைப்படுத்துவது ஆகும்.

இயற்கை எண்கள் முறையை $(N, +, \cdot, <)$ என்று குறியிடுவோம். சிலர் இதனை நேர் முழுவெண்கள் கணிதமுறை என்பர்.

1·3. முழுவெண்கள் (Integers)

$(N, +, \cdot, <)$ என்ற இயற்கை எண்கள் அல்லது நேர் முழுவெண்கள் கணித முறையிலிருந்து எல்லா முழுவெண்களும் கொண்ட தொகுதியை அமைக்கலாம். எப்படி ?

N என்பது இயற்கை எண்கள் கணமானல்

$D = N \times N$ என்க.

$(m, n), (p, q) \in D$ என்ருல்

$(m, n) \sim (p, q) \leftrightarrow m + q = n + p$ என்றவாறு $\sim$ என்ற சமநிலைத் தொடர்பை (equivalence relation) வரையறு. D-ல் $\sim$-ஆல் உண்டாக்கப்பட்ட "சமநிலை இனங்கள்" தாம் "முழுவெண்கள்" எனப்படுபவை.

முழுவெண்கள் கணத்தை $\mathbf{Z}$ என்போம்.

$(m, n) \in D$ ஐக்கொண்ட சமநிலை இனத்தை $[m, n]$ என்போம்.

$[m, n], [p, q] \in \mathbf{Z}$ என்ருல், $[m, n] + [p, q] = [m+p, n+q]$ என்றும், $[m, n] \cdot [p, q] = [mp+nq, mq+np]$ என்றும் $+$ என்ற கூட்டலையும் $\cdot$ என்ற பெருக்கலையும் வரையறு.

முழுவெண்கள் கணத்துள் $+$, என்ற செயலிகளைப்பொறுத்து சேர்ப்பு விதி, பரிமாற்று விதி, பங்கீட்டு விதி அனைத்தும் உண்மை. கூட்டலின் முற்றெருருமை 0; பெருக்கலின் ஓருமை 1. முழுவெண்கள் கணத்துள் வரிசைப்படுத்தலைப் (ordering) புகுத்தலாம். எப்படி ?

$[m, n], [p, q] \in \mathbf{Z}$ என்ருல் "$<$" என்ற தொடர்பை

$[m, n] < [p, q] \leftrightarrow m+q < n+p$ என்றவாறு வரையறு.

$[m, n], [p, q]$ என்ருல் $[p, q] < [m, n]$ என்று பொருள்.

"$<$"-ஐ "விடச் சிறியது" என்றும் "$>$"-ஐ "விடப் பெரியது" என்றும் படிக்கவும்.

x என்பது முழுவெண் என்க. $x>0$ என்றால் x-ஐ நேர் முழு வெண் என்றும் $x<0$ என்றால் x-ஐ எதிர் முழுவெண் என்றும் கொள்வர்.

"முப்பாக விதி"யின் (Trichotomy Law)படி, ஒரு முழு வெண், நேராகவோ, எதிராகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ ஏதாவது ஒன்றாகத்தான் இருக்கும். நேர் முழுவெண்கள் கணத்தை $\mathbf{Z}^+$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

$x, y, z \in \mathbf{Z}$ என்றால்

(1) $x<y$ என்றால் தான் $x+z<y+z$

(2) $x<y$ என்றால் தான் $z>0 \rightarrow xz < yz$

(3) $x>y$ என்றால் தான் $z<0 \rightarrow xz < yz$

(4) $z \neq 0, xz=yz \rightarrow x=y$

(5) $m>a$ என்றால் தான், $[m, a]$ என்ற முழுவெண் நேர் ஆக இருக்கும்.

(6) $\mathbf{Z}^+ = \{ [k+1,1] \mid k \in n \}$

(7) $x, y \in \mathbf{Z}^+ \rightarrow x+y \; xy \in \mathbf{Z}^+$

(8) $x \in \mathbf{Z}, x \neq 0 \rightarrow x \in \mathbf{Z}^+$ அல்லது $-x \in \mathbf{Z}^+$

1·4. விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers)

$(\mathbf{Z}, +, \cdot, <)$ என்ற கணிதமுறையைக் கொண்டு விகிதமுறு எண்கள் கணிதமுறையை அமைப்போம்.

$m, n \in z, n \neq 0$ என்றால் $\frac{m}{n}$ஐ விகிதமுறு எண் என்போம். $n \neq 0$ என்றால் முழு எண்களில் ஒவ்வொரு ஜோடி(m, n)-க்கும் ஏற்ப ஒரு விகிதமுறு எண் $\frac{m}{n}$ஐத் தொடர்பிப்போம். ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் முழு எண்களின் அநேக வெவ்வேறு ஜோடி களுக்குப் பொருந்துவன.

உதாரணமாக, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \ldots = \frac{-5}{-15} = \ldots$

$m_1 n_2 = n_1 m_2$ என்றால் (m_1, n_1), (m_2, n_2) என்ற ஜோடிகள் சமம் என்போம்.

முன்பகுதி 1·3-ல், $(N, +, \cdot, <)$-லிருந்து $(\mathbf{Z}, +, \cdot, <)$-ஐ அமைத்தது போல் $n \neq 0$ என்றவாறு முழு எண்களின் எல்லா ஜோடிகள் (m, n) கொண்ட கணத்துள் ஒரு சமநிலைத் தொடர்பை வரையறுத்து இந்த சமநிலைத் தொடர்பின் சமநிலை இனங்களின் கணத்தை விகிதமுறு எண்களின் கணம் என்று வரையறுப்போம்.

$F = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$ என்க.

$ad = bc$ என்றால்தான் $(a, b) \sim (c, d)$ என்றவாறு F-ன் மீது $\sim$ என்ற தொடர்பை வரையறுப்போம். F-ன் மீது $\sim$ ஆனது "சமநிலைத் தொடர்பு" ஆகும் என்று எளிதில் நிறுவலாம். இது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டது.

F-ல் $\sim$-ன் சமநிலை இனங்களின் கணத்தை $\mathbf{Q}$ என்று குறியிட்டால் $\mathbf{Q}$-ன் உறுப்புகளுக்கு விகிதமுறு எண்கள் என்று பெயரிடலாம். $(a, b) \in F$ என்றால், (a, b)-யை உடைய $\sim$-ன் சமநிலை இனத்தை $[a, b]$ என்று குறியிடலாம்.

$[a, b], [c, d] \in \mathbf{Q}$ என்றால் $\mathbf{Q}$-ன் மீதான $+$ என்ற கூட்டல் $\cdot$ பெருக்கல் என்ற செயலிகளை முறையே

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd] \text{ என்றும்}$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd] \text{ என்றும் வரையறுக்க.}$$

$x, y, z \in \mathbf{Q}$ என்றால் கீழ்க்கண்டவை உண்மை.

(1) $(x+y) + z = x + (y+z)$; $(xy)z = x(yz)$

(2) $x+y = y+x$; $xy = yx$

(3) $(x+y)z = xz + yz$

(4) $[0, a] \in \mathbf{Q}$ என்றால் $x + [0, a] = x$

$[0, b] \in \mathbf{Q}$ என்றால் $[0, a] = [0, b]$

$[0, a]$ என்ற உறுப்பைப் "பூச்சியம்" (zero) என்போம். இதனை 0 என்று எழுதலாம்.

(5) a என்பது பூச்சியமற்ற முழுவெண் என்றால் $x[a, a] = x$ b ஒரு பூச்சியமற்ற முழுவெண் என்றால் $[a, a] = [b, b]$. $[a, a]$ என்ற உறுப்பை ஒன்று (one) என்போம். இதனை 1 என்று எழுதலாம்.

(6) $[a, b] = [c, d] \rightarrow [-a, b] = [-c, d]$.

$[-a\ b]$ என்பது $[a, b]$-ன் "எதிர்" எனப்படும். இதனை $-[a, b]$ என்று எழுதுவோம்.

$x \in Q \rightarrow x + (-x) = 0$

$x + (-y)$-ஐ $x - y$ என்று வழக்கமாக எழுதுவதுண்டு.

(7) $[a, b] \neq 0$ என்றால் $(b, a) \in F$

$[a, b] \neq 0, [a, b] = [c, d] \rightarrow (d, c) \in F, [b, a] = [d, c]$

$[b, a]$ என்பது $[a, b]$-ன் "நேர்மாறு" எனப்படும்.

இதனை $[a, b]^{-1}$ என்று எழுதுவோம்.

$x \neq 0$ என்றால், $x\, x^{-1} = 1$.

(8) $x(-y) = (-x)\, y = -(xy)$.

(9) $x \cdot 0 = 0$.

(10) $x(y - z) = xy - xz$.

(11) $-(-x) = x$.

(12) $-(x + y) = -x - y$.

(13) $x, y \neq 0 \rightarrow xy \neq 0, (xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$.

(14) $x \neq 0 \rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$.

மேற்கண்ட முதல் ஏழு பண்புகளை Q பெற்றிருப்பதால் Q-ஐ "விகிதமுறு எண்கள் களம்" என்போம்.

$ab > 0$ என்றால், விகிதமுறு எண் $[a, b]$-ஐ "நேர்" என்றும், $ab < 0$ என்றால் $[a, b]$-ஐ "எதிர்" என்றும் சொல்வோம். முழு எண்களின் மூன்றுவது விதிப்படி முழுவெண் ab ஆனது நேர், எதிர் அல்லது பூச்சியமாக—ஏதாவது ஒன்றுதான்—இருக்க வேண்டும் என்பதால் விகிதமுறு எண் $[a, b]$-ம் நேராகவோ எதிராகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ—ஏதாவது ஒன்றுகத் தான்—இருக்க வேண்டும். நேர் விகிதமுறு எண்கள் கணத்தைக் கொண்டு Q-ல் வரிசைப்படுத்தல் தொடர்பை ஏற்படுத்துவோம்.

$x, y \in Q$ என்க. $y - x$ நேர் என்றால்தான் y-ஐவிட x குறைந்தது என்போம். இதனை $x < y$ என்று எழுதுவோம். $x > y$ என்றால் $y < x$ என்று பொருள். x ஆனது y-ஐ விட அதிகம் என்று சொல்லுவோம்.

$x \leqq y$ என்றால் $x<y$ அல்லது $x=y$ என்றும்

$x \geqq y$ என்றால் $x>y$ அல்லது $x=y$ என்றும் கொள்வோம்.

$x, y, z \in \mathbf{Q}$ என்றால் கீழ்க்கண்டவை உண்மை.

(1) $x>0 \leftrightarrow -x<0$.

(2) $x>0,\ y>0 \rightarrow x+y>0,\ xy>0$.

(3) $x>0, y<0 \rightarrow xy<0$.

(4) $x<y,\ x>y,\ x=y$ என்பவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றுதான் சரி.

(5) $x>0 \leftrightarrow x^{-1}>0$ $\quad [x = [a,b]$ எனின் $x^{-1} = [b,a]\ ]$

(6) $<$ என்பது "செல்லும்" (Transmitive) பண்புடையது.

(7) $x+y < x + z \leftrightarrow y<z$

(8) $y<z$ என்றால்தான் $x>0 \rightarrow xy<xz$

(9) $y>z$ என்றால்தான் $x<0 \rightarrow xy<xz$

தேற்றம்

r, s என்பவை இரண்டு நேர் விகிதமுறு எண்களானால், $nr>s$ என்றவாறு n என்ற நேர் முழுவெண் இருக்கிறது.

நிறுவல்

$r = [r_1, r_2],\ s = [s_1, s_2],\ r_1, r_2,\ s_1, s_2 > 0$ என்க.

$n = [r_2 s_1 + r_2,\ 1]$ என்க.

$$\therefore\ [r_2 s_1 + r_2,\ 1]\,[r_1, r_2] = [r_1 r_2 (s_1 + 1),\ r_2]$$

$$= [r_1 (s_1 + 1),\ 1] \geqq [s_1 + 1,\ 1] > [s_1] \geqq [s_1, s_2]$$

$$\therefore\ nr>s.$$

1·5. மிக முக்கியமான பண்புகள்

1. x, y என்பவை யாதாமிரு விகிதமுறு எண்கள் என்றும் $x<y$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் $x<z<y$ என்றவாறு விகிதமுறு எண் z இருக்கிறது. சுருக்கமாக இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கு நடுவில் முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள (Infinite)

விகிதமுறு எண்கள் இருக்கின்றன. Q-ன் இந்தப் பண்பை, "Q அடர்த்தியானது (dense)" என்று சொல்வார்கள்.

நிறுவல்

$$z = (x+y)[1,\ 1+1]$$

$x = [a, b],\ y = [c, d]$ என்க.

$$\therefore\ x-y = [ad-bc,\ bd] < 0$$

$$\because\ x-y < 0\ \ \therefore bd\,(ad-bc) < 0$$

$$z = [ad + bc,\ bd]\,[1,\ 1+1] = [ad+bc,\ bd+bd]$$

$$x-z = [a, b] + [-ad-bc,\ bd+bd]$$

$$= [abd - bbc,\ bbd + bbd]$$

$$(bbd + bbd)\,(abd - bbc) = (bb + bb)\,(bd)\,(ad - bc)$$

$$\because\ bb + bb > 0$$

மேலும் $bd\ (ad-bc) < 0$, $\therefore\ x-z < 0$ அதாவது $x < z$ இதுபோல் $z < y$ என்பதையும் நிறுவலாம்.

கவனிக்க : Q-ன் இந்த அடர்த்திப் பண்பு Z-க்கு இல்லை.

2. எண்ணிடத் தக்கமை (Countability)

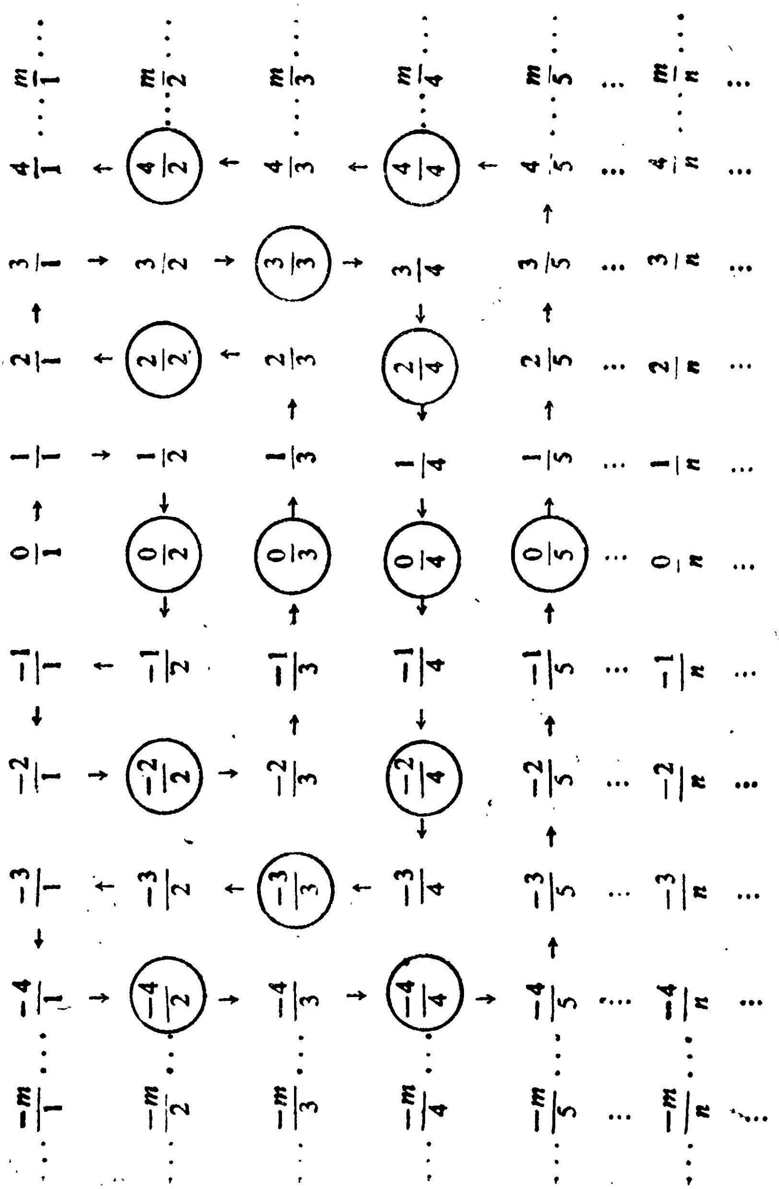
பண்பு: விகிதமுறு எண்கள் கணம் Q ஆனது எண்ணிடத் தக்கது.

வரையறை: கொடுக்கப்பட்ட முடிவில்லாத கணமானது இயற்கை எண்கள் கணம் N-உடன் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியை பில் இருக்குமானல் அந்தக் கணத்தை எண்ணிடத் தக்கது என்போம்.

"ஒன்றுக் கொன்றான ஒத்தியைபு" என்பதால் Q-விருந்து N-க்கு (1—1), முழுக் கோர்த்தல் இருக்கிறது என்று பொருள்.

நிறுவல்

எந்த விகிதமுறு எண்ணையும் அதன் விகுதி எண் (Denominator) நேர் முழுவெண்ணாக இருக்குமாறு எழுதலாம் என்பதை நினைவில் இருத்திப் பின் காணும் அட்டவணையை அமைப்போம்.



மேற்கண்ட அட்டவணையில் $\frac{0}{1}$ லிருந்து ஆரம்பித்து அம்புக் குறிகள் வழியே செல்வோமானல் நமக்கு வேண்டிய ஏதாவது ஒரு விகிதமுறு எண்ணைச் சந்திப்போம். அந்த எண்ணின் தொகுதி யெண் (Numerator) முழுவெண்ணுக ஒரு நிரலிலும், விகுதியெண் நேர் முழுவெண்ணுக ஒரு நிரலிலும் காணலாம்.

இந்த அட்டவணையில் அம்புக் குறிகள் வழியே காணும் விகிதமுறு எண்களில் ஏற்கனவேயே நாம் சந்தித்த எண்கள் சுழிக்கப்பட்டுள்ளன; அவற்றைத் தவிர்த்து மற்றவற்றைக் கீழ்க் கண்டவாறு இயற்கை எண்களுடன் ஒரு கோர்த்தலை அமைக் கலாம்.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
Q & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3}\ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
N & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots
\end{array}
$$

இந்தக் கோர்த்தலின் கீழ் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணுக்கும் ஒத்த ஒரு இயற்கை எண்ணும், ஒவ்வொரு இயற்கை எண்ணுக்கும் ஒத்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணும் அமைந்திருக்கிறது. ஆகையால் இந்த கோர்த்தல் (1—1), முழுக் கோர்த்தல்.

$\therefore$ Q ஆனது எண்ணிடத்தக்கது.

3. பதின் பகுப்பு விளக்க முறை (Decimal Representation)

பண்பு : ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் பதின் பகுப்பு முறையில் எழுதலாம்; இந்த பதின் பகுப்பு முறை முடிவுள்ள தாகவோ, முடிவில்லாததாகவோ இருக்கலாம்; முடிவில்லாததாயின் திரும்பும் (periodic) தன்மையது. m, n என்பவை பொதுக்காரணி கள் இல்லாத நேர் முழுவெண்கள் என்ருல் $\frac{m}{n}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக்கொள். வகுத்தல் கணக்குப்படி,

$$m=nq+r, \quad 0 \leqq r<n$$

என்றவாறு q, r என்ற முழுவெண்கள் இருக்கின்றன. n-ஆல் வகுக்க

$$\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}, 0 \leqq \frac{r}{n}<1$$

$r=0$ என்ருல் பதின் பகுப்பு முற்றுப் பெறுகிறது.

$r \neq 0$ என்றால் நேர் முழுவெண்கள் $10r$, n-க்கு வகுத்தல் கணக்கை பயன்படுத்தினால்

$10r = nd_1 + r_1,\ 0 \leqq r_1 < n_1$, முழுவெண் d_1

$r<n$ என்பதால்

$$10r = nd_1 + r_1 < 10n$$
$$\rightarrow d_1<10$$

$10n$-ஆல் வகுக்க, $\frac{r}{n} = \frac{d_1}{10} + \frac{r_1}{10n}$;

$$\therefore \frac{m}{n} = q + \frac{d_1}{10} + \frac{r_1}{10n}$$

$r_1=0$ என்றால் $\frac{m}{n}$ ன் பதின் பகுப்பு முடிவடைகிறது.

$r_1 \neq 0$ என்றால் $\frac{r_1}{n} < 1$,

$$q+\frac{d_1}{10} \leqq \frac{m}{n} = q + \frac{d_1}{10} + \frac{r_1}{10q} < q + \frac{d_1+1}{10}$$

இப்போது மறுபடியும், முழுவெண்கள் $10r_1$, q-க்கு வகுத்தல் கணக்கை பயன்படுத்துவோம்.

$10r_1 = nd_2 + r_2,\ 0 \leqq r_2 < n$, முழுவெண் d_2

முன்போல் $d_2<10$ என்றும்

$\frac{r_1}{10n} = \frac{d_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 n}$ என்றும்,

$\frac{m}{n} = q + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 n}$ என்றும்

காண்பிக்கலாம்.

இப்போது $\frac{r_2}{10n} < 1$ என்பதும்

$$q + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} \leqq \frac{m}{n} = q + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 n}$$
$$< q + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2+1}{10^2}$$

என்பதும் உண்மை.

$r_2 \neq 0$ என்றால் இந்த செய்கை(process)யை யாதோ r_i ஆனது மீதி பூச்சியமாகும் வரையாவது நீடிக்க வேண்டும். அல்லது $j < k$ ஏதோ ஒரு மீதி r_k ஆனது இதற்கு முந்தைய மீதி r_j-க்குச் சமமாகும் வரையாவது நீடிக்க வேண்டும். மீதி ஒன்றும் பூச்சியமாகாதென்றால் பின்னது நடந்தே தீரும். ஏனெனில் n-ஆல் வகுக்க கிடைக்கக் கூடிய பூச்சியமற்ற மீதிகளின் எண்ணிக்கை $(n-1)$-க்கு மேற்பட்டதல்ல. இந்த நிகழ்ச்சியில் (in this case) $\frac{m}{n}$-க்கு முடிவுறாத பதின் பகுப்பு முறை உண்டு என்பதுடன் இலக்கங்கள் $d_j d_{j+1} \ldots d_{k-1}$ முடிவில்லாமல் திரும்பத் திரும்ப வருவன.

$\therefore$ ஒரு விகிதமுறு எண் r-க்கு முடிவில்லாத பதின் பகுப்பு விளக்கமுறை உண்டென்றால் அம்முறை திரும்பும் தன்மையது.

r என்ற விகிதமுறு எண்ணின் பதின் பகுப்பு விளக்கமுறை என்பதன் பொருள் ஒவ்வொரு இயற்கை எண் k-க்கு

$$q + \frac{d_1}{10} + \ldots + \frac{d_k}{10^k} \leqq r < q + \frac{d_1}{10} + \ldots + \frac{d_k + 1}{10^k}$$

$$d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

என்ற சமனிலியை r உறுதிப்படுத்துகிறது என்பதாகும்.

தேற்றம் 1.

$x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் விகிதமுறு எண் x இல்லை. அதாவது, $x^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ என்றவாறு பொதுக்காரணிகள் அல்லாத முழுவெண்கள் m, n இல்லை.

நிறுவல்

முடியுமானால், $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ என்றவாறு பொதுக் காரணிகள் அல்லாத இரு முழுவெண்கள் m, n இருக்கட்டும்.

$$\therefore \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \rightarrow m^2 = 2n^2$$

n முழுவெண் என்பதால் n^2-ம் முழுவெண்ணே.

$\therefore$ $2n^2$ ஒரு இரட்டை முழுவெண். அதாவது m^2 ஒரு இரட்டை முழுவெண்ணாகும்.

∴ m-ம் ஒரு இரட்டை முழுவெண்ணே.

∴ $m = 2k$ என்க, k ஏதோ ஒரு முழுவெண்.

∴ $m = 2k \rightarrow m^2 = 4k^2$

∴ $m^2 = 2n^2, m^2 = 4k^2 \rightarrow 2n^2 = 4k^2 \rightarrow n^2 = 2k^2$

ஆனால் k^2 என்பது ஒரு முழுவெண். ∴ n^2 ஆனது ஒரு இரட்டை முழுவெண்.

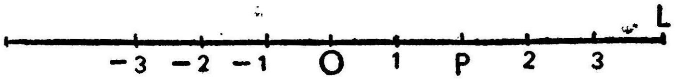
அதாவது n-ம் ஒரு இரட்டை முழுவெண்.

∴ m-ம், n-ம் இரட்டை முழுவெண்கள் என்பதால் m-க்கும், n-க்கும் பொதுக்காரணி 2 என்றிருக்க வேண்டும். இது "m-க்கும் n-க்கும் பொதுக்காரணிகள் அல்ல" என்ற தற்கோளின் எதிர் மறுப்பு.

∴ $x^2 = 2$ என்றவாறு விகிதமுறு எண் x இல்லை.

குறிப்பு : மேற்கண்ட தேற்றத்தில் x-க்கு 'விகிதமுறாத எண்' (Irrational Number) என்று பெயர்.

1·6. விகிதமுறு எண்களும், நேர் கோட்டின் விகிதமுறு புள்ளிகளும் (Rational Numbers and Rational Numbers on a Line)



படம் 1

வலப்பக்கமும், இடப்பக்கமும் முடிவின்றி நீளும் L என்ற நேர் கோட்டை எடுத்துக்கொள். அதன் மீது யாதாமிரு புள்ளிகளைக் குறிப்புப் புள்ளிகளாக (reference points) எடுத்துக் கொள்வோம். அவற்றுடன் 0, 1 என்ற எண்களைத் தொடர்பிப்போம். 0, 1 என்ற எண்கள் அப்புள்ளிகளின் கூறுகள் எனப்படுவன.

0-ஐக் கூறுகவுடைய புள்ளியை ஆதி அல்லது ஆரம்பப் புள்ளி (origin) என்றும் 1-ஐக் கூறுகவுடைய புள்ளியை அலகு (unit) என்றும் கொள்வோம்.

அலகுப் புள்ளியை ஆதிக்கு வலப்புறத்தில் எடுத்துக் கொள்வது வழக்கமாகி விட்டதே தவிர கட்டாயமில்லை; இடது புறத்திலும் இருக்கலாம். ஆதிக்கும் அலகுப் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை ஆரையாகக் கொண்டு அலகுப் புள்ளியின் வலது புறத்

தில் சம இடைவெளிகளில் புள்ளிகளை ஏற்படுத்தலாம். இப்புள்ளி களின் கூறுகளை 2, 3, . . . என்று பெயரிடலாம். இதுபோல் ஆதியின் இடது புறத்தில் —1, —2, . . . என்ற கூறுகளையுடைய புள்ளிகளை ஏற்படுத்தலாம். இது போல் நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒத்த ஒரு புள்ளியை நேர் கோடு L-ல் அமைக்கலாம். இப்போது விகிதமுறு பின்னம் $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$-க்கு ஏற்ப ஒரு புள்ளியை L-ல் அமைக்க முடியுமா? முடியும். எப்படி? முதலில் ஆதிக்கும் அலகுப் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை q சம துண்டுகளாக வெட்டிக் கொள்க. இப்போது ஒவ்வொரு துண்டின் நீளம் $\frac{1}{q}$. $pq > 0$ என்றால் அதாவது $\frac{p}{q}$ ஆனது நேர் என்றால் ஆதிக்கு வலப்புறத்தில் $\frac{1}{q}$ நீளமுள்ள p துண்டுகளை எடுத்துக்கொள். கிடைக்கும் புள்ளி $\frac{+p}{q}$ க்கு ஒத்தது.

$pq < 0$ என்றால், அதாவது $\frac{p}{q}$ ஆனது எதிர் என்றால் ஆதிக்கு இடப்புறத்தில் $\frac{1}{q}$ நீளமுள்ள p துண்டுகளை எடுத்துக் கொள். கிடைக்கும் புள்ளி $\frac{-p}{q}$ க்கு ஒத்தது. கிடைத்த புள்ளி யின் கூறு $\frac{p}{q}$ ஆகும். இதனால் பெறப்படுவது யாதெனில், ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணுக்கு ஏற்ப ஒரு புள்ளியை L என்ற நேர் கோட்டில் அமைக்கலாம்.

இந்த விவாதத்தில் சுவையான செய்தி யாதெனில், நேர் கோடு L-ல் அநேக பல புள்ளிகள் எந்த விகிதமுறு எண்ணுக்கும் ஒத்தவை அல்ல என்பதாகும். உதாரணமாக ஆதிக்கும் அலகுப் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 1 அலகு என்றால், 90°-ஐ உடைய பக்கங்களின் நீளங்கள் 1,1 ஆகப் பெற்ற செங்கோண முக்கோணத்தை வரைந்து கொள்வோம். இதன் கர்ணம் (hypotenuse) $\sqrt{(2)}$ அலகுகள். இந்த கர்ணத்தை எடுத்து அதன் ஒரு முனை ஆதியின்மீது இருக்குமாறும் கர்ணம் L-ன்மீது படியுமாறும் வைக்கவும். கர்ணத்தின் மறுமுனை L-ல் P என்ற புள்ளியின் மீது பொருந்தட்டும். P ஆனது நிச்சயமாக விகிதமுறு கூறை உடைய புள்ளி அல்ல. ஏனெனில் $\sqrt{(2)}$ என்பது விகிதமுறு எண் அல்ல என்பதை தேற்றம் 1-லேயே நிறுவிவிட்டோம்.

இந்த உதாரணம் நமக்குத் தெளிவுபடுத்தும் உண்மையா தெனில் விகிதமுறு கூறுகள் அல்லாத புள்ளிகள் நேர் கோடு L-ல் இருக்கின்றன என்பதாகும்.

இம்மாதிரியான முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள புதுப் புள் ளிகள் விகிதமுறாத எண்களைக் குறிக்கின்றன என்போம். இந்த விகிதமுறா எண்களைப்பற்றி அருவமான முறையில் (abstract way) அடுத்த பிரிவில் விரிவாகக் காண்போம்.

1·7. மெய்யெண்கள் (Real Numbers)

"டெடெகின்ட் வழி" (Dedekind's method) அல்லது டெடெகின்ட் வெட்டு" (Dedekind cut)

விகிதமுறு எண்கள் முறையினின்று மெய்யெண்களை அமைக்க கோஷி-தொடர்முறை வழி (Cauchy sequence method) அல்லது டெடெகின்ட்-வெட்டு வழி (Dedekind cut method) பயன்படும். பெரும்பாலும் டெடெகின்ட் வழிதான் பின்பற்றப்படுகின்றது. ரிசர்ட் டெடெகின்ட் (Richard Dedekind, 1831—1916) என்ற ஜெர்மானியக் கணித மேதை கண்டுபிடித்தது தான் டெடெகின்ட் வெட்டு வழி.

டெடெகின்ட் வெட்டு வழி

ஏதோ ஒரு வழியில் எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் இரு வகுப்புகளாகப் பிரித்து விட்டதாகக் கொள்வோம். ஒரு வகுப்பை "கீழ் வகுப்பு (lower class) A" என்றும் மற்ற வகுப்பை "மேல் வகுப்பு (upper class) B" என்றும் பெயரிடுவோம். கீழ் வகுப்பின் ஒவ்வொரு எண் α-ம் மேல் வகுப்பின் ஒவ்வொரு எண் β-வை விடக் குறைந்ததாயிருக்கட்டும். இப்போது α என்ற எண் A-ல் இருந்தால், α-க்குக் குறைந்த ஒவ்வொரு எண்ணும் A-ல் இருக்கும். β என்ற எண் B-ல் இருந்தால் β-க்கு அதிகமான ஒவ்வொரு எண்ணும் B-ல் இருக்கும்.

இப்போது எழும் மூன்று வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிகளாவன :

I. கீழ் வகுப்பிற்கு மீப்பெரிய எண் உண்டு; மேல் வகுப்பிற்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை.

II. கீழ் வகுப்பிற்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை; மேல் வகுப்பிற்கு மீச்சிறிய எண் உண்டு.

III. கீழ் வகுப்பிற்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை; மேல் வகுப்பிற்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை.

IV. கீழ் வகுப்பிற்கு மீப்பெரிய எண் உண்டு; மேல் வகுப்பிற்கு மீச்சிறிய எண் உண்டு.

இந்த மூன்றாவது நிகழ்ச்சிக்குக் காரணமாயிருக்கும் பிரிவினை அல்லது வகுப்புதான் விகிதமுறா எண் (irrational number) என்ற புதிய எண்ணை உருவாக்குகிறது. இப்போது இந்த விகிதமுறா எண் தன்கீழ் வகுப்பின் எல்லா விகிதமுறு எண்களுக்கு அதிகமாயும், மேல் வகுப்பின் எல்லா விகிதமுறு எண்களுக்குக் குறைவாயும் இருக்கிறது என்போம்.

இவ்வகையாக,

(i) விகிதமுறு எண்களை எல்லா வகைகளிலும் கீழ் வகுப்பு A, மேல் வகுப்பு B என்றவாறு பிரிக்க முடியும்;

(ii) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஏதாவது ஒரு வகுப்பில் இருக்க வேண்டும்;

(iii) கீழ் வகுப்பின் எண்கள் மேல் வகுப்பின் எண்களை விடக் குறைந்தவை;

(iv) கீழ் வகுப்பிற்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை. மேல் வகுப்பிற்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை;

என்ற நான்கு விதிகளுக்கு உட்பட்டு விகிதமுறா எண்கள் முறை அமையும். அதாவது ஒவ்வொரு விகிதமுறாத எண்ணும் அதன் பிரிவினை (A, B) யால் வரையறுக்கப்படுகிறது. இந்தப் பிரிவினை அல்லது வகுப்பிற்கு ஒத்தது இந்த விகிதமுறாத எண் எண்போம். விகிதமுறு எண்களும் விகிதமுறாத எண்களும் கொண்ட கணித முறைதான் மெய்யெண்கள் கணிதமுறை எனப்படும்.

1·8. டெடெகின்ட் வெட்டு வழி, விகிதமுறு எண்களின் வெட்டாக $\sqrt{(2)}$-ஐ வரையறுத்தல்

ஒரு முக்கிய உதாரணம் $x^2=2$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். x ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகாது என்று ஏற்கனவே கண்டோம். எந்த விகிதமுறு எண்ணுடைய வர்க்கமும் 2-க்கு குறைந்தோ அதிகமாகவோ இருக்கும்.

(எண்ணியல் செயல்முறையில் 2-ன் வர்க்க மூலத்தைக் காணும்போது நமக்கு கிடைக்கும் விகிதமுறு எண்கள் 1, 1·4, 1·41, 1·414, 1·4142, ... I என்பன.)

இவற்றின் வர்க்கங்கள் முறையே

1, 1·96, 1·9881, 1·999396, 1·99996164, ... (I) என்பன. இந்த வர்க்கங்கள் அனைத்தும் 2-க்கு குறைந்தவையே யானாலும் 2-ஐ மிக மிக நெருங்குகின்றன.

மேற்கண்ட I-ன் தோராயங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் கடைசி இலக்கத்துடன் 1 கூட்டினால் கிடைக்கும் விகிதமுறு எண்கள் 2, 1·5, 1·42, 1·415, 1·4143, ... (II) என்பன. இவற்றின் வர்க்கங்கள் முறையே

4, 2·25, 2·0164, 2·002225, 2·00024449 என்பவை. இவ்வர்க்கங்கள் அனைத்தும் 2-க்கு அதிகமானவையே யென்றாலும் 2-ஐ வேண்டிய வரையிலும் நெருங்குகின்றன. இப்போது விகிதமுறு எண்கள் அனைத்தையும் இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்கலாம். மேற்கண்ட (I)-ன் விகிதமுறு எண்கள் அனைத்தும் கொண்ட *A* என்ற கீழ் வகுப்பையும் (II)-ன் விகிதமுறு எண்கள் அனைத்தும் கொண்ட *B* என்ற மேல் வகுப்பையும் அமைக்க இந்த வகைப் பிரிவினையால் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் இரு வகுப்புகளில் யாதானுமொரு வகுப்பில் இருக்கும்.

மேலும் கீழ் வகுப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் மேல் வகுப்பின் ஒவ்வொரு எண்ணை விடக் குறைந்தது. மற்றும் *A*-ல் மீப்பெரிய எண் இல்லை; *B*-ல் மீச்சிறிய எண் இல்லை. ஏனெனில் *A*-ன் யாதாமொரு உறுப்பு x எனில், $x^2<2$. $\therefore x^2=2-\delta$ என்க. அதாவது $\delta=2-x^2$. இப்போது $2-x_1^2$ ஆனது δ-ஐவிடக் குறைவாயிருக்குமாறு *A*-ல் x_1 என்ற உறுப்பைக் காணலாம். அப்போது $2-x^2<2-x_1^2$ அதாவது $x_1^2>x^2$. $\therefore x_1>x$.

இதுபோல் x-க்கு அதிகமான எண்களை *A*-ல் காணலாம். x ஆனது *A*-ன் யாதாமொரு உறுப்பு என்பதால் *A*-ன் எந்த ஒரு உறுப்பும் *A*-ன் மற்றெல்லா உறுப்புகளுக்கு அதிகமாய் இராது; ஆகையால் *A*-ல் மீப்பெரிய உறுப்பு இல்லை. இதுபோல் *B*-ல் மீச்சிறிய உறுப்பும் இல்லை.

$\therefore$ விகிதமுறு எண்களின் இந்தப் பிரிவினை ஒரு புதிய எண்ணை வரையறுத்திருக்கிறது. இதைத்தான் விகிதமுறாத எண் $\sqrt{(2)}$ என்பது.

1·9. டெடெகின்ட் தேற்றம் (Dedekind's Theorem)

மெய்யெண்கள் கணிதமுறையானது A, B என்ற இரு வகுப்புகளாக

(i) ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண்ணாவது இருக்கிறது;

(ii) ஒவ்வொரு எண்ணும் யாதானும் ஒரு வகுப்பில் இருக்கிறது;

(iii) கீழ் வகுப்பு A-ன் ஒவ்வொரு எண்ணும் மேல் வகுப்பு B-ன் ஒவ்வொரு எண்ணை விடச் சிறியது;

என்றவாறு பிரிக்கப்பட்டால்

ஒரு எண் α என்பது

(i) α-ஐ விடச் சிறிய எண் ஒவ்வொன்றும் கீழ் வகுப்பு A-ல் உள்ளது;

(ii) α-ஐ விடப் பெரிய எண் ஒவ்வொன்றும் மேல் வகுப்பு B-ல் உள்ளது;

என்றவாறு இருக்கிறது. இந்த α A-யிலாவது B-யிலாவது இருக்கலாம். α-க்குப் பிரிக்கும் எண் என்று பெயர்.

நிறுவல்

A-யிலும் B-யிலும் மெய்யெண்கள் இருக்கின்றன. இப்போது A-விலுள்ள விகிதமுறு எண்கள் L என்ற வகுப்பையும் B-யிலுள்ள விகிதமுறு எண்கள் U என்ற வகுப்பையும் ஏற்படுத்தட்டும். ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் L அல்லது U-வில் இருப்பதுடன், கீழ் வகுப்பு L-ல் உள்ள எண்கள் எல்லாம் U-வில் உள்ள எண்களுக்குக் குறைவானவையாக இருப்பன.

இப்போது எழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) கீழ் வகுப்பு L-ல் மீப்பெரிய எண் இருக்கலாம். இதனை r என்க. மேல் வகுப்பு U-வில் மீச்சிறிய எண் இல்லை.

இந்நிகழ்ச்சி உண்மையானால், விகிதமுறு எண் r ஆனது தேற்றத்தின் எண்ணான α ஆகும் என நிறுவலாம். எப்படி எனில் r ஆனது L-ல் உள்ளது. L ஆனது A-ன் ஒரு பகுதி. ஆதலால் r ஆனது A-ல் உள்ளது. ஆதலால் r-க்குக் குறைந்த

ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் A-ல் உள்ளது. r-க்கு அதிகமான ஒரு விகிதமுறு எண் β என்றால், β ஆனது U-வில் உள்ளது. ஆனால் U ஆனது B-ன் ஒரு பகுதி.

$\therefore$ β ஆனது B-ல் உள்ளது.

இப்போது r-க்கு அதிகமான ஒரு விகிதமுருத எண் γ என்றால் r-க்கும் γ-க்கும் இடையே உள்ள அநேக பல விகிதமுறு எண்களில் ஒன்றை எடுத்துக் கொள். இதனை s என்க. இப்போது s ஆனது B-ல் இருக்கிறது. ஆனால் γ ஆனது s-ஐ விட அதிகம்.

$\therefore$ γ-ம் B-ல் உள்ளது.

ஆகையால் எந்த வகையிலும் $r=\alpha$.

(ii) **மேல் வகுப்பு U-ல் மீச்சிறிய எண் இருக்கலாம். கீழ் வகுப்பு L-ல் மீப்பெரிய எண் இல்லை.**

(i)-ல் நிறுவியபடியே, இந்த மீச்சிறிய எண் ஆனது தேற்றத்தின் எண் α-வே என்று நிறுவலாம்.

(iii) கீழ் வகுப்பு L-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை. மேல் வகுப்பு U-க்கும் மீச்சிறிய எண் இல்லை.

(L, U) என்ற வெட்டினால் வரையறுக்கப்பட்ட விகிதமுரு எண் λ என்க. λ-க்குக் குறைந்த எந்த விகிதமுறு எண்ணும் A-ல் உள்ளது. λ-க்கு அதிகமான எந்த விகிதமுறு எண்ணும் B-ல் இருக்கிறது.

λ-க்குக் குறைந்த விகிதமுருத எண் δ என்க. λ-க்கும் δ-க்கும் இடையே முடிவில்லாத அநேக பல விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன. இவற்றில் ஒன்று t என்க. t ஆனது λ-க்குக் குறைந்ததென்பதால் t ஆனது A-ல் உள்ளது. δ ஆனது t-க்குக் குறைந்ததென்பதால் δ-ம் A-ல் உள்ளது. ஆகையால் λ-க்குக் குறைந்த எந்த விகிதமுருத எண்ணும் A-ல் உள்ளது. இதுபோல் λ-க்கு அதிகமான எந்த விகிதமுருத எண்ணும் B-ல் உள்ளது.

இந்த மூன்று நிகழ்ச்சிகளில் (i)-ல் α ஆனது கீழ் வகுப்பில் உள்ளது; α ஒரு விகிதமுறு எண்; (ii)-ல் α ஆனது மேல் வகுப்பில் உள்ளது. α ஒரு விகிதமுறு எண்; (iii)-ல் α ஆனது விகிதமுருத எண்; A-யிலோ B-யிலோ உள்ளது.

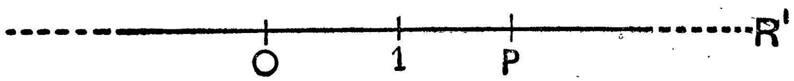
மிக மிக முக்கியமான குறிப்பு : டெடெகின்டின் விகிதமுறு வெட்டிற்கும் மெய்யெண் வெட்டிற்கும் உள்ள அடிப்படை வேறுபாடு என்னவெனில் டெடெகின்டின் விகிதமுறு எண்களின் பிரிவினை எப்போதும் விகிதமுறு எண்ணை வரையறுப்பதில்லை. சில விகிதமுறு எண்களின் பிரிவினைகள் விகிதமுறுத எண்களையும் வரையறுக்கின்றன. ஆனால் டெடெகின்டின் எந்த மெய்யெண்களின் பிரிவினையும் எப்போதும் ஒரு மெய்யெண்ணை வரையறுக்கின்றது என்று மேற்கண்ட டெடெகின்ட் தேற்றத்தால் தெளிந்தோம். இதனால் நாம் அறிவது விகிதமுறு எண்களின் நடுவே துளைகள் (gaps) இருக்கின்றன என்பதும், ஆனால் டெடெகின்ட் தேற்றபடி மெய்யெண்களின் கணிதமுறையில் துளைகள் (gaps) அல்ல என்பதுமாகும். இதையே வடிவ கணிதத்தில், ஒரு விகிதமுறு நேர் கோட்டில் துளைகள் ஏராளம் என்றும், மெய் நேர் கோட்டில் துளைகள் கிடையாது என்றும் சொல்லுவர். விகிதமுறு நேர் கோட்டிலுள்ள துளைகள்தாம் விகிதமுறுத எண்கள்.

1·10. நேர் கோட்டுத் தொடரகம்—டெடெகின்டின் அடிகோள் (Linear Continuum—Dedekind's Axiom)

விகிதமுறு எண்கள், விகிதமுறுத எண்கள் — இவை எல்லாமாகச் சேர்ந்து 'திரள்' அல்லது 'மொத்தம்' (aggregate) எனப்படுவன. இந்த 'மெய்யெண்கள் மொத்தம்' ஆனது "எண்கணிதத் தொடரகம்" (arithmetical continuum) எனப்படும். இந்த எண்கள் அனைத்தையும் ஒரு நேர் கோட்டின் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். நேர் கோட்டில் அமைந்த இப் "புள்ளிகளின் மொத்தம்" ஆனது "நேர் கோட்டுத் தொடரகம்" (linear continuum) எனப்படும்.

ஏற்கனவே 1·5-ல் விகிதமுறு எண்களையும் அவற்றுக்கொத்த விகிதமுறு புள்ளிகளை முடிவில்லாத நேர் கோட்டில் அமைப்பதைப் பற்றியும் ஆராய்ந்தோம்.

இப்போது, அதேபோல், முடிவில்லாத நேர் கோட்டை எடுத்துக்கொண்டு அதை **R′** என்று பெயரிடுக. இந்த நேர் கோட்டை "மெய்யான நேர் கோடு" என்பது வழக்கம்.



படம் 2

R′ல் O என்ற நிலையான புள்ளியை ஆதியாகக் கொள்க. O-ஐ ஒரு முனையாகக் கொண்டு **R′**-ல் ஒரு நிலையான துண்டை

அத்துண்டின் மறுமுனையை 1 என்க—எடுத்துக்கொள்க. இத் துண்டை நீளங்களின் அலகாக எடுத்துக்கொள்க. இந்த அலகுத் துண்டின் மடங்குகள் அல்லது கீழ் மடங்குகளின் நீளங் களை O-விலிருந்து அளந்தால் கிடைக்கும் துண்டுகளின் மறுமுனைகள் விகிதமுறு எண்களைக் குறிக்கின்றன என்று 1·6-ல் கண்டோம். இப்போது அலகுத் துண்டிற்குப் பொதுவளவற்ற (incommensurable) துண்டு OP என்க. P ஆனது நேர் கோட்டின் விகிதமுறு புள்ளிகளை இரு வகுப்புகளாகப்—(1) கீழ் வகுப்பின் எல்லா புள்ளிகளும் மேல் வகுப்பின் புள்ளிகளுக்கு இடப்பக்கம் அமைந்திருக்குமாறும் (2) கீழ் வகுப்பில் கடைசிப் புள்ளி அதாவது முடியும் புள்ளி (last point) இல்லை. மேல் வகுப்பில் முதல் புள்ளி அதாவது ஆரம்பப் புள்ளி (first point) இல்லை என்றவாறு—பிரிக்கின்றது. அப்படியானால் P-ஐ நேர் கோட்டின் "விகிதமுருப் புள்ளி" என்போம்.

விகிதமுறு எண்களின் இந்தப் பிரிவினையால் வரையறுக்கப் பட்ட விகிதமுரு எண் ஆனது, துண்டு OP-ன் அளவையாகும். இதனால் பெறப்படுவது யாதெனில் R'-ன் எந்த புள்ளிக்கும் ஒத்த மெய்யெண் இருக்கிறது; கூட, R'-ன் வெவ்வேறு புள்ளி களுக்கு ஒத்த வெவ்வேறு மெய்யெண்கள் இருக்கின்றன. ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணுக்கும் ஒத்த ஒரு புள்ளி நேர் கோடு R'-ல் உள்ளது.

இதுபோல் ஒவ்வொரு விகிதமுருத எண்ணுக்கும் ஒத்த ஒரு புள்ளி R'-ல் இருக்கின்றது என்று நாம் நிறுவ முடியாது. இதை ஒரு அடிகோளாக எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த அடிகோளினுல் R'-க்குத் தொடர்ச்சிப் பண்பு உண்டாகின்றது. இப்போது "தொடர்ச்சித் தத்துவம்" (Principle of Continuity) அல்லது "டெடெகின்டின் தொடர்ச்சி அடிகோள்" (Dedekind's Axiom of Continuity) என்பதாவது: "நேர் கோடு R'-ன் ஒவ்வொரு புள்ளி P-க்கும் ஒத்த ஒரு மெய்யெண்—விகிதமுறு எண் அல்லது விகிதமுருத எண் இருப்பதுடன் அந்த எண் துண்டு OP-ன் அளவையைக் கொடுக்கும். மேலும் மெய்யெண்கள் மொத்தத்தின் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும் ஒத்த ஒரு புள்ளி P ஆனது R'-ல் இருக்கிறது என்பதுடன் துண்டு OP-ன் அளவைதான் அந்த எண் ஆகும்.

11·1. மெய்யெண்கள் R எண்ணிடத் தக்கவை அல்ல

எல்லா மெய்யெண்களையும் முடிவில்லாத சமமாக குறிக்கலாம் என்பதை வைத்து எடுத்துக் கொண்ட பொருளை நிறுவுவோம்.

எளிமைக்காக $0 < x < 1$ என்றவாறு மெய்யெண்கள் x-ஐ உடைய கணம் **Q**-ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த கணம் எண்ணிடத் தக்கது அல்ல என நிறுவினுல் "மெய்யெண்கள் **R** எண்ணிடத் தக்கவை அல்ல" என்பது உண்மை ஆகிவிடும்.

முடியுமாஞல் மெய்யெண்கள் **Q** எண்ணிடத்தக்கவை என்று வைத்துக் கொள்வோம். ஆகையால் N என்பது இயற்கை எண்கள் கணமாஞல், N-க்கும் **Q**-க்கும் இடையே ஒன்றுக் கொன்ருன ஒத்தியைபு, அதாவது N-லிருந்து **Q**-க்கு (1, 1) முழுக் கோர்த்தல் உண்டு என்று பொருள். **Q**-ன் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் " முடிவில்லாத சம"மாக எழுதலாம். " முடியும் சம"மாக இருப்பின் அதனை பூச்சியங்களாக முடியும் திரும்பும் தசமங்களாக எழுதலாம்.

கீழ்கண்டவாறு N-ன் ஒவ்வொரு எண்ணுடன் **Q**-ன் ஒவ்வொரு எண்ணை f-ஆல் கோர்க்கவும் :

$$\begin{array}{lcl} N & \overset{f}{\longleftrightarrow} & \mathbf{Q} \\ 1 & \longleftrightarrow & \cdot a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_k \ldots \\ 2 & \longleftrightarrow & \cdot b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_k \ldots \\ 3 & \longleftrightarrow & \cdot c_1\ c_2\ c_3 \ldots c_k \ldots \\ \vdots & & \qquad\qquad \vdots \\ n & \longleftrightarrow & \cdot r_1\ r_2\ r_3 \ldots r_k \ldots \\ \vdots & & \quad \vdots \end{array}$$

இங்கேயுள்ள எல்லா முழுவெண்களும் $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ என்ற கணத்தில் உள்ளன.

f ஆனது முழுக் கோர்த்தலாகையால் **Q**-ன் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் இந்தப் பட்டியலில் இருக்கிறது. இப்போது இந்தப் பட்டியலில் சேராத ஒரு மெய்யெண் **Q**-ல் இருக்கிறது என்று காண்பிப்போம்.

$x = \cdot\, t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_k \ldots$ என்ற எண்ணை

t_1 ஆனது a_1-னின்று வேறுபட்ட இலக்கம்

t_2 ஆனது b_2-லிருந்து மாறுபட்ட இலக்கம்

t_3 ஆனது c_3-லிருந்து வேறுபட்டது . . .

t_n என்பது r_n-லிருந்து வேறுபட்டது . . .

என்றவாறு அமை. நிச்சயமாக இப்போது உருவாக்கிய எண் x ஆனது பட்டியலில் உள்ள எந்த மெய்யெண்ணினின்றும் வேறு

பட்டது. இருப்பினும் x ஆனது 1-க்கு குறைந்த நேர் தசம எண் என்பதால், Q-ல் x இருக்க வேண்டும். இது ஒரு எதிர்மறுப்பு.

∴ **R** ஆனது எண்ணிடத்தக்கதல்ல.

1·12. கீழ்கண்ட சில வினு—விடைகள் மூலம் டெடெகின்ட் வெட்டைப்பற்றியும் அதனுடன் இயைந்த உண்மைகளைப் பற்றியும் இப்பகுதியில் தெளிவாக அறிவோம்.

(1) டெடெகின்ட் வெட்டு என்றால் என்ன? உதாரணங் களுடன் விளக்குக.

0-ஐச் சேர்த்து எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் முறையே A, B என்ற கீழ், மேல் வகுப்புகளாக

(i) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் A-யிலோ B-யிலோ இருக்க வேண்டும்.

(ii) A-ன் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் B-ன் எந்த விகித முறு எண்ணை விடச் சிறியது என்றவாறு பிரிக்க வேண்டும்.

A-யும், B-யும் வெற்று அல்ல.

இம்மாதிரிப் பிரிவினைக்கு "டெடெகின்ட் வெட்டு" (Dedekind cut) அல்லது "டெடெகின்ட் பிரிவு" (Dedekind section) என்று பெயர்.

(i) 0-க்கு குறைந்த எல்லா விகிதமுறு எண்களை A-யிலும் 0-க்கு அதிகமான எல்லா விகிதமுறு எண்களை B-யிலும் போடுக. இப்போது இந்தப் பிரிவினையானது டெடெ கின்ட் வெட்டு ஆகாது. ஏன்? ஏனெனில் 0 ஆனது A-யிலும் இல்லை; B-யிலும் இல்லை.

(ii) சரி; இப்போது எல்லா பின்னங்களை A-யிலும் 0-ஐச் சேர்த்து எல்லா முழுவெண்களை B-யிலும் போடுக. இந்தப் பிரிவினை டெடெகின்ட் வெட்டு ஆகுமா? ஆகாது. ஏனென்று கேட்டால் ஒவ்வொரு பின்னமும் ஒவ்வோரு முழு எண்ணை விடச் சிறியதாக இருக்க வேண்டுவதில்லை யல்லவா.

(iii) சரி; 2-ஐயும் 2-ஐவிடச் சிறிய விகிதமுறு எண்களையும் A-ல் போடுக; 2-ஐ விட அதிகமான விகிதமுறு எண் களை B-ல் போடுக. இப்போது இந்தப் பிரிவினையானது

டெடெகின்ட் வெட்டுக்கான இரு நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகிறது. இது ஒரு டெடெகின்ட் வெட்டு. *A*-ன் மீப்பெரிய எண் ஆனது 2. ஆனால் *B*-க்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை.

(2) டெடெகின்ட் வெட்டின் கீழ் வகுப்பு *A* என்றும் மேல் வகுப்பு *B* என்றும் கொண்டால் கீழ்க்காணும் செயற் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளுக்கு (Possible cases, Possibilities, Possible occurrences) உதாரணம் தரவும்.

(i) *A*-க்கு மீப்பெரிய எண் உண்டு, *B*-க்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை.

(ii) *A*-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை, *B*-க்கு மீச்சிறிய எண் உண்டு.

(iii) *A*-க்கு மீப்பெரிய எண் உண்டு, *B*-க்கு மீச்சிறிய எண் உண்டு.

(iv) *A*-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை, *B*-க்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை.

(இதற்குக் கொடுக்கப்படும் உதாரணம், "விகிதமுறுத எண் இருக்கிறது" என்பதற்குச் சான்று.)

விடை

(i) மேற்கண்ட கணக்கு (1)-ன் (iii)-வது உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

(ii) 1-க்கு குறைவான எல்லா விகிதமுறு எண்களை *A*-யிலும் 1-ஐயும் 1-க்கு அதிகமான எல்லா விகிதமுறு எண்களை *B*-யிலும் போடுக. இது ஒரு டெடெகின்ட் வெட்டு. *A*-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை. *B*-க்கு மீச்சிறிய எண் ஆனது 1.

(iii) இதற்கு உதாரணமே இல்லை. அதாவது அம்மாதிரி டெடெகின்ட் வெட்டே இல்லை.

அப்படியே இருக்கிறது என்று வைத்துக் கொண்டால் *a* என்பது *A*-ன் மீப்பெரிய எண் என்றும், *b* என்பது *B*-ன் மீச்சிறிய எண் என்றும் கொள்க.

$\therefore\ a<b$

மேலும் $a<\frac{1}{2}(a+b)<b$ *a*-ம் *b*-ம் விகிதமுறு எண்கள்.

$\frac{1}{2}(a+b)$-ம் விகிதமுறு எண் $> a \to \frac{1}{2}(a+b)$ ஆனது A-ல் இல்லை.

$\frac{1}{2}(a+b) < b \to \frac{1}{2}(a+b)$ ஆனது B-ல் இல்லை.

$\therefore$ A-யிலும் B-யிலும் அல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண் $\frac{1}{2}(a+b)$ என்பது.

$\therefore$ டெடெகின்ட் வெட்டின் முதல் நிபந்தனை மீறப்பட்டது.

$\therefore$ நமக்கு வேண்டிய டெடெகின்ட் வெட்டு இல்லை.

(iv) 2-ஐ வர்க்கமாகக் கொண்ட விகிதமுறு எண் இல்லை. (பார்க்க 1·5 தேற்றம்). அதாவது எந்த விகிதமுறு எண்ணை வர்க்கமாக்கினாலும் 2 வராது. ஆனால் அநேக விகிதமுறு எண்களின் வர்க்கங்கள் 2-க்கு மிகமிக நெருக்கத்தில் உள்ளன. ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் முடிவுள்ள பதின் பகுப்பு முறையாகவோ முடிவில்லாத திரும்பும் பதின் பகுப்பு முறையாகவோ எழுதவல்லது.

உதாரணமாக,

2, 1·5, 1·42, 1·415, 1·4143, . . .

1, 1·4, 1·41, 1·414, 1·4142, . . .

என்ற தொடர்ச்சியான இருவரிசை எண்களை எடுத்துக் கொண்டால், மேல் வரிசை எண்கள் ஒவ்வொன்றின் வர்க்கமும் 2-ஐவிட அதிகமாகவும் கீழ் வரிசை எண்கள் ஒவ்வொன்றின் வர்க்கமும் 2-ஐவிடச் சிறியதாகவும் உள்ளன. x என்ற விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கம் 2-னின்று மிகமிகக் குறைந்த அளவில் வேறுபடுமாறு x-ஐ மேல் வரிசையிலும், கீழ் வரிசையிலும் காணலாம்.

இப்போது 0, குறை விகிதமுறு எண்கள், 2-ஐ விடச் சிறிய வர்க்கங்களுள்ள நேர் விகிதமுறு எண்கள் (அதாவது மேலே எழுதியுள்ள கீழ் வரிசை விகிதமுறு எண்கள்)—இவை A என்ற கீழ் வகுப்பையும், 2-ஐவிட அதிகமான வர்க்கங்களுள்ள நேர் விகித முறு எண்கள் (அதாவது மேல் வரிசை விகிதமுறு எண்கள்) அனைத்தும் B என்ற மேல் வகுப்பையும் அமைக்கட்டும். இத்தகைய விகிதமுறு எண்களின் பிரிவினை டெடெகின்ட் வெட்டு ஆகும். எப்படி என்று விவரிக்க.

எல்லா குறை விகிதமுறு எண்களும் 0-ம் A ல் உள்ளன. ஒவ்வொரு நேர் விகிதமுறு எண்ணும் A-யிலோ B-யிலோ இருக்க

வேண்டும். ஏனெனில் ஒவ்வொரு நேர் விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கம் 2-ஐவிடக் சிறியதாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருக்க வேண்டும். ஆகையால் டெடெகின்ட் வெட்டின் முதல் நிபந்தனை நிறைவேறியது. *A*-ல் ஒவ்வொரு குறை எண்ணும் 0-ம் *B*-ன் எந்த எண்ணையும் விடச் சிறியது என்பது தெளிவு.

இப்போது *A*-ன் யாதாமொரு நேர் விகிதமுறு எண் a என்க. அதே போல் b என்பது *B*-ன் யாதாமொரு நேர் விகிதமுறு எண் என்க.

நம் பிரிவினையின்படி,

$$a^2<2, \qquad b^2>2$$

$$\therefore \quad a^2<b^2$$

$$\therefore \quad a<b$$

$\therefore$ டெடெகின்ட் வெட்டிற்கான இரண்டாவது நிபந்தனையும் நிறைவேற்றப்பட்டது.

A	B
0	
−1, −1·4, −3,	2, 1·5, 1·42
. . . . . .	1·415, 1·4143
1, 1·4, 1·41,	
1·414, . . .	

A-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை; *B*-க்கு மீச்சிறிய எண்ணும் இல்லை. எப்படி? முடியுமானால் *A*-யின் மீப்பெரிய எண் a என்க.

யாதாமொரு $\varepsilon>0$-ஐ எடுத்துக் கொள்.

$a+\varepsilon>a$, ஆனதால், $a+\varepsilon$ ஆனது *B*-ல் இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad a^2<2<(a+\varepsilon)^2$$

(அதாவது) $0<2-a^2<(a+\varepsilon)^2-a^2$

(அதாவது) $0<2-a^2<2a\varepsilon+\varepsilon^2$

$2-a^2=\delta>0$ என்க.

$$\therefore \quad 0<\delta<2a\varepsilon+\varepsilon^2$$

$$\therefore \quad 2a\varepsilon+\varepsilon^2>\delta \qquad \text{......(I)}$$

$0<c<2a,\ 0<c<\frac{\delta}{4a}$ என்றவாறு c என்ற ஒரு நேர் எண்ணை எடுத்துக்கொள்ளவும்.

$$\therefore\quad c^2 < 2a\cdot\frac{\delta}{4a} = \frac{\delta}{2}$$

$$2ac < 2a\cdot\frac{\delta}{4a} = \frac{\delta}{2}$$

$$\therefore\quad 2ac + c^2 < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \qquad \text{......(II)}$$

(I) ஆனது எந்த ε-க்கும் உண்மையாதலால் $\varepsilon = c$ என்பதற்கு

$$2ac + c^2 > \delta \qquad \text{......(III)}$$

இது (II)-ன் எதிர்மறுப்பு.

$\therefore$ A-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை.

இப்போது முடியுமானுல் B-ன் மீச்சிறிய எண் b என்க. $0<\varepsilon<b$ என்றவாறு ε என்ற நேர் எண்ணை எடுத்துக்கொள்க. $b-\varepsilon<b$ என்பதால், $b-\varepsilon$ ஆனது A-ல் இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore\quad (b-\varepsilon)^2<2<b^2$$

$$\therefore\quad (b-\varepsilon)^2-b^2<2-b^2<0$$

$$\therefore\quad 0<b^2-2<2b\varepsilon-\varepsilon^2 \qquad \text{......(IV)}$$

$\delta<\frac{b^2-2}{2b}$ என்றவாறு நேர் எண் δ-வை எடுத்துக்கொள்க.

$$\therefore\quad b^2-2>2b\delta \qquad \text{......(V)}$$

மேலும் $\delta-b<\frac{b^2-2}{2b}-b=\frac{b^2-2b^2-2}{b}=\frac{-b^2-2}{2b}$

அதாவது $\delta-b$ ஆனது குறை எண்ணை விடக் குறைந்தது.

$\therefore\quad \delta-b<0 \qquad \therefore\quad \delta<b$

$\therefore\quad 0<\delta<b$

[அல்லது, $\delta<\frac{b^2-2}{2b}=\frac{b}{2}-\frac{1}{b}<b$]

(IV)-ல் $0<\varepsilon<b$ என்பதால் $\varepsilon=\delta$ என்று வைத்துக் கொள்ளலாம்.

$\therefore$ (IV)-லிருந்து $b^2-2<2b\delta-\delta^2$

$$<2b\delta \qquad \text{......(VI)}$$

இது (V)-ன் எதிர் மறுப்பு.

∴ *B*-க்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை.

∴ இந்தப் பிரிவினை, அதாவது டெடெகின்ட் வெட்டு ஒரு புதிய எண்ணை உருவாக்குகிறது. இதைத்தான் விகிதமுரு எண்ணான $\sqrt{(2)}$ என்கிறோம். இம்மாதிரி விகிதமுரு எண்ணை வரையறுக்கும் டெடெகின்ட் வெட்டிற்கு "விகிதமுரு வெட்டு" என்று பெயர்.

(3) விகிதமுறு எண்களைப் பகுப்பாய்வு இயலில் டெடெகின்ட் வெட்டு எப்படி புகுத்துகிறது என்பதை விளக்கு.

விடை

0-வைச் சேர்த்து எல்லா விகிதமுறு எண்களையும், *A*, *B* என்ற இரு வகுப்புகளாக

(i) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் *A*-யிலோ, *B*-யிலோ இருக்கிறது. ஒரு வகுப்பும் வெற்றாக இல்லை;

(ii) *A*-ன் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் *B*-ன் எந்த விகிதமுறு எண்ணை விடச் சிறியது;

என்றவாறு பிரிக்கவும். *A*-க்கு கீழ் வகுப்பு என்றும், *B*-க்கு மேல் வகுப்பு என்றும் பெயர். இந்த டெடெகின்ட் வெட்டு ஆனது,

(i) கீழ் வகுப்பு *A*-ல் மீப்பெரிய எண் உண்டு; மேல் வகுப்பு *B*-ல் மீச்சிறிய எண் இல்லை;

(ii) *A*-ல் மீப்பெரிய எண் இல்லை; *B*-ல் மீச்சிறிய எண் உண்டு;

(iii) *A*-ல் மீப்பெரிய எண் இல்லை; *B*-யிலும் மீச்சிறிய எண் இல்லை, என்ற மூன்று வகைகளில் ஏதாவதொன்றாக அமையலாம்.

(i)-வது வகையானால், *A*-ன் மீப்பெரிய எண் *a* என்றால் டெடெகின்ட் வெட்டு ஆனது விகிதமுறு எண் *a*-ஐ வரையறுத்திருக்கிறது என்றும்,

(ii)-வது வகையானால், *B*-ன் மீச்சிறிய எண் *b* என்றால் டெடெகின்ட் வெட்டு ஆனது, விகிதமுறு எண் *b*-ஐ வரையறுக்கிறது என்றும் சொல்வோம்.

ஆனால் (iii)-வது வகையானால், *A*-ன் எண்களை விடப் பெரியனவாயும் *B*-ன் எண்களை விடச் சிறியனவாயும் உள்ள விகிதமுறு எண் எதுவுமில்லை.

விகிதமுறு எண்கள் எவற்றுக்கும் ஒவ்வாத இத்தகைய டெடெகின்ட் வெட்டுக்கு ஒத்த புதிய எண் விகிதமுறு எண்ணாக இராது. இப்புதிய எண்ணை விகிதமுரு எண் என்கிறோம். இத்தகைய வெட்டை "விகிதமுரு வெட்டு என்போம்". இத்தகைய எல்லா விகிதமுரு வெட்டுகளும், விகிதமுரு எண்களைத் தருகின்றன.

(4) "டெடெகின்ட் துணைத்தேற்றம்" (Dedekind's Lemma) என்ன? நிறுவுக.

விடை

தேற்றம்: "m என்பது வர்க்கமற்ற நேர் முழுவெண் என்றால், m-ஐ வர்க்கமாக உடைய எந்த விகிதமுறு எண்ணும் இல்லை".

(**குறிப்பு:** m-ஐ நேர் முழுவெண்ணின் வர்க்கமாக எழுத முடியாவிட்டால் அதனை வர்க்கமற்ற நேர் முழுவெண் என்கிறோம்.

நிறுவல்

m ஆனது வர்க்கமற்ற நேர் முழு எண்ணானதால் $\lambda^2 < m < (\lambda+1)^2$ ......(I) என்றவாறு எழுதலாம். முடியுமானால் சுருங்கிய விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q}$ ஆனது $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = m$...(II) என்றவாறு இருக்கட்டும்.

$\therefore$ (I), (II)-லிருந்து,

$$\lambda^2 < \left(\frac{p}{q}\right)^2 < (\lambda+1)^2$$

அல்லது, $$\lambda < \frac{p}{q} < \lambda+1$$

$$\lambda q < p < (\lambda+1)q$$

அதாவது $0 < p-\lambda q < q$ ......(III)

இப்போது, $(mq - \lambda p)^2 - m(p - \lambda q)^2$

$= m^2q^2 - 2\lambda mpq + \lambda^2p^2 - mp^2 + 2mpq - m^2\lambda^2q^2$

$= p^2(\lambda^2 - m) - mq^2(\lambda^2 - m)$

$= (p^2 - mq^2)\ (\lambda^2 - m)$

$= 0\,(\lambda^2 - m)$ (II)-லிருந்து

$= 0,$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = m \rightarrow (mq - \lambda p)^2 = m(p - \lambda q)^2$$

$$\rightarrow m = \left(\frac{mp - \lambda p}{p - \lambda q}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \left(\frac{mq - \lambda p}{p - \lambda q}\right)^2$$

$$\therefore \frac{p}{q} = \frac{mq - \lambda p}{p - \lambda q}$$

ஆனல் $\frac{p}{q}$ ஆனது சுருங்கிய பின்னமெனை ஆரம்பத்திலேயே எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம்.

$$\therefore p - \lambda q > q$$

இது (III)-ன் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore m = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ என்ற நமது தற்கோள் தவறு.

(5) விகிதமுறு எண்கள் முறையின் அடர்த்திப் பண்பை (Density property) நிறுவுக.

நிறுவல்

அதாவது, எந்த இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே முடிவில்லாத பல விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என்று நிறுவ வேண்டும்.

a, b என்பவை இரு விகிதமுறு எண்கள் என்றும், $a<b$ என்றும் கொள்க.

இப்போது $a - \frac{a+b}{2} = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0 \quad \because a<b$

இதேபோல் $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0 \quad \because a<b$

$$\therefore a < \frac{a+b}{2} < b$$

a, b என்பவை விகிதமுறு எண்களாகையால், $\frac{a+b}{2}$-ம் ஒரு விகிதமுறு எண் தான்.

$\therefore$ யாதாமிரு விகிதமுறு எண்கள் a-க்கும் b-க்கும் இடையே ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் கண்டோம்.

(6) நம் விருப்பத்திற்கிய மிகமிகச் சிறிய நேர் எண் ε என்க. டெடெகின்ட் வெட்டின் கீழ் வகுப்பு A-ல் x என்ற ஒரு எண்ணும், மேல் வகுப்பு B-ல் y என்ற ஒரு எண்ணும் $y-x=\varepsilon$ என்றவாறு இருக்கின்றன என்பதை நிறுவுக.

a, b என்பவை முறையே கீழ்வகுப்பு A-யிலும் மேல் வகுப்பு B-யிலும் உள்ள யாதாமிரு எண்கள் என்க.

டெடெகின்ட் வெட்டுப்படி $b>a$ $\therefore$ $b-a>0$ மேலும் $\varepsilon>0$.

$\therefore$ ஆர்கிமிடீயன் பண்புப்படி $n\varepsilon>b-a$ என்றவாறு ஒரு நேர் முழுவெண் n இருக்கிறது.

$$\therefore \quad a+n\varepsilon>b.$$

இப்போது, a, $a+\varepsilon$, $a+2\varepsilon, \ldots, a+n\varepsilon$ என்ற எண்களை எடுத்துக் கொள்க.

a என்பது A-ல் உள்ளதால், $a+n\varepsilon$ ஆனது B-ல் இருக்க வேண்டும்.

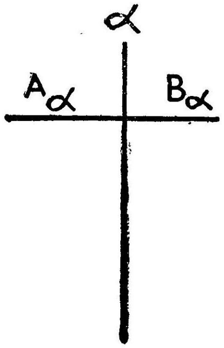
$\therefore$ $a+r\varepsilon$ என்பது A-ல் இருந்தால், $a+(r+1)\varepsilon$ ஆனது B-ல் இருக்க வேண்டும்; இவற்றை முறையே x, y என்றால் $y-x = a+(r+1)\varepsilon - (a+r\varepsilon)$
$= \varepsilon$

1·13. விகிதமுறுத எண்களை ஒட்டிய சில முக்கிய வரை இலக்கணங்கள்; தேற்றங்கள்.

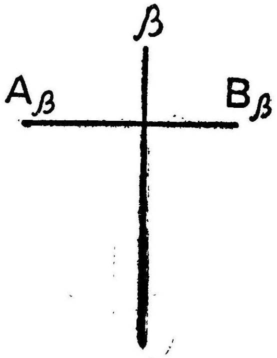
வரை இலக்கணம் I

α, β என்ற இரு விகிதமுறுத எண்களின் சமத்துவம்

முறையே $(A_\alpha\ B_\alpha)$, $(A_\beta\ B_\beta)$ என்ற விகிதமுறுத வெட்டுகளினால் வரையறுக்கப்பட்ட விகிதமுறு எண்கள் α, β என்க.



படம் 3



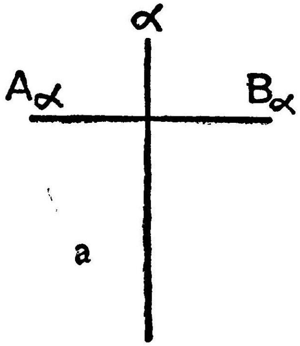
படம் 4

A_α-ன் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் A_β-விலும், மறுதலை யாக A_β-ன் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் A_α-விலும் இருந்தால் விகிதமுருத எண்கள் α-ம் β-ம் சமமென்போம்.

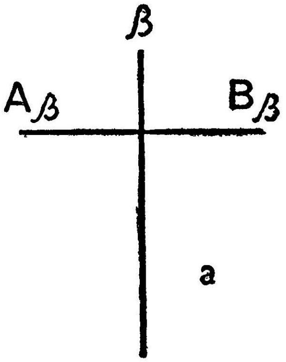
குறிப்பு : இதுவரை இலக்கணத்தின் வாயிலாக நாம் தெளிவாக அறிவது யாதெனில் A_α, A_β-க்குப் பதிலாக முறையே B_α B_β எனப் பிரதியிட்டால், வரை இலக்கணம் மாறுது.

வரை இலக்கணம் 2

α, β என்ற இரு விகிதமுருத எண்களின் சமனின்மை



படம் 5



படம் 6

பட விளக்கம் $\alpha > \beta$

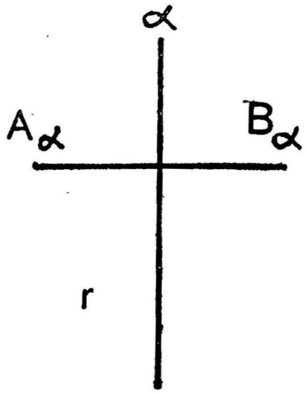
A_α-ன், குறைந்த பட்சம் ஒரு எண்ணுவது B_β-ல் இருந்தால் $\alpha > \beta$ என்போம்.

இதேபோல், B_α-ன், குறைந்தபட்சம் ஒரு எண்ணுவது A_β-ல் இருந்தால், $\alpha < \beta$ என்போம்.

வரை இலக்கணம் 3

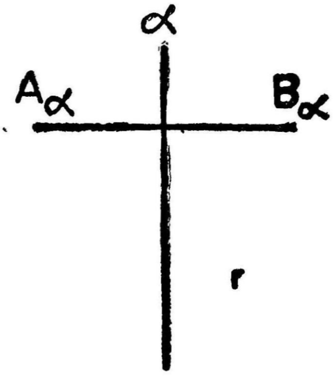
விகிதமுறு எண் r, விகிதமுருத எண் α—இவற்றின் சமனின்மை.

α என்பது (A_α, B_α) என்ற விகிதமுரு வெட்டென்ருல் r என்பது A_α-விலோ B_α-விலோ இருக்க வேண்டும். இது தான் (A_α, B_α)-ன் வரை இலக்கணம்.



படம் 7

பட விளக்கம் $\alpha > r$



படம் 8

பட விளக்கம் $\alpha < r$

r என்பது A_α-ல் இருந்தால் $\alpha > r$ என்றும், r ஆனது $B\alpha$-ல் இருந்தால் $\alpha < r$ என்றும் வரையறுப்போம்.

1·14. 1·3-ன் வரை இலக்கணங்களை ஒட்டிய சில முக்கிய கணக்குகள்.

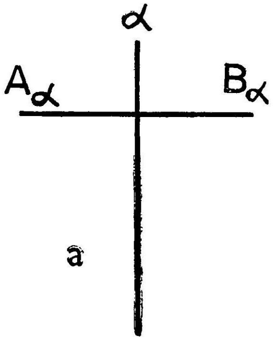
(1) இரு வெவ்வேறு விகிதமுறாத எண்களுக்கு இடையே முடிவில்லாத அநேக பல விகிதமுறு எண்கள் இருக்கின்றன என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

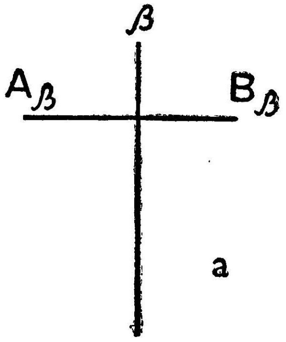
குறைந்த பட்சம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாவது இருக்கிறதென்று காண்பிப்போம். கொடுப்பட்ட விகிதமுறாத எண்கள் α, β என்க.

முறையே (A_α, B_α), (A_β, B_β) என்ற விகிதமுறாத வெட்டுகளினால் வரையறுக்கப்பட்ட விகிதமுறாத எண்கள் α, β என்க. $\alpha > \beta$ என்றால், 1·13, வரை இலக்கணம் 2-ன்படி

$A\alpha$-ன் குறைந்தபட்சம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாவது இதனை a என்க — $B\beta$-ல் இருக்க வேண்டும்.



படம் 9



படம் 10

∴ வரை இலக்கணப்படி

$\alpha > a, \qquad a > \beta$

∴ $\alpha > a > \beta$

∴ α-க்கும், β-க்கும் இடையே குறைந்தபட்சம் ஒரு விகித முறு எண்ணுவது இருக்கிறது.

குறிப்பு : $\alpha < \beta$ என்றால் குறைந்தபட்சம் b என்ற விகித முறு எண் $\alpha < b < \beta$ என்றவாறு b-ஐக் காணலாம். இங்கே b என்பது B_α-லும் A_β-லும் உள்ளது.

(2) ஒரு விகிதமுறு எண்ணுக்கும், ஒரு விகிதமுறுத எண்ணுக்கும் இடையே முடிவில்லாத அநேக பல விகிதமுறு எண்கள் எனக் காண்பிக்க.

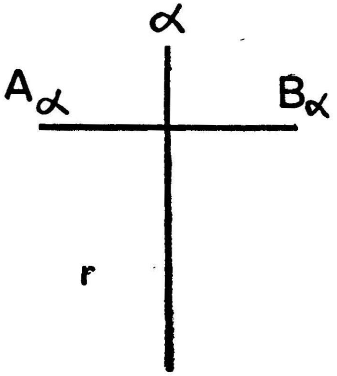
விடை

r என்ற விகிதமுறு எண்ணும், α என்ற விகிதமுறுத எண்ணும் கொடுக்கப்பட்டவை என்க.

$\alpha > r$ என்க.

α-க்கு ஒத்த டெடெகின்ட் வெட்டு (A_α, B_α) என்றால் விகித முறு எண் A_α-ல் இருக்க வேண்டும் (1·13 வரை இலக்கணம் 3).

ஆனால் விகிதமுறுத டெடெகின்ட் வெட்டின்படி A_α-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை.



படம் 11

∴ r-ஐ விடப் பெரிய எண்கள் ஏராளம் முடிவில்லாதவை α-ஐ விடச் சிறிய எண்களும் முடிவில்லாத அநேக பல உள்ளன. ∴ α-க்கும் r-க்கும் இடையே முடிவில்லாத அநேக பல விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

இதுபோல், $\alpha < r$ என்றாலும் இதே உண்மையை நிறுவலாம்.

குறிப்பு

1·11 கணக்கு (5), 1·13 கணக்குகள் (1), (2) ஆகியவற்றை ஒன்று சேர்த்தால் கிடைப்பது, "யாதாமிரு வெவ்வேறு மெய்யெண்களுக்கிடையே முடிவில்லாத அநேக பல விகிதமுறு எண்கள் இருக்கின்றன."

(3) யாதாமிரு வெவ்வேறு மெய்யெண்களுக்கு இடையே முடிவில்லாத அநேக பல விகிதமுருத எண்கள் இருக்கின்றன என நிறுவுக.

விடை

m_1, m_2 என்பவை கொடுக்கப்பட்ட இரு மெய்யெண்களென்க. $m_1 < m_2$ என்க.

இரு வெவ்வேறு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே ஏராளமான விகிதமுறு எண்கள் இருப்பதனால், $m_1 < r_1 < r_2 < m_2$ என்றவாறு இரு விகிதமுறு எண்கள் r_1, r_2 என்பவற்றை எடுத்துக் கொள்க. r_1, r_2-க்களுக்கு இடையே ஒரு விகிதமுருத எண் இருக்கிறது என்று காண்பித்தால் போதும். α என்பது ஒரு விகிதமுருத எண் என்க. α ஆனது r_1-க்கும் r_2-க்கும் இடையே இல்லையெனில் α உடன் சரியான ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் கூட்ட r_1-க்கும் r_2-க்கும் இடையே ஒரு விகிதமுருத எண்ணைக் காணலாம்.*

எப்படியெனில், $r' < \alpha < r''$ என்றவாறும் $r'' - r' < r_2 - r_1$ இரு விகிதமுறு எண்கள் r', r''-ஐக் காணலாம். இப்போது $(r_1 - r') + \alpha$ என்பதுதான் வேண்டிய ஒரு விகிதமுருத எண்.

அதாவது $r_1 < r_1 - r' + \alpha < r_2$. எப்படி?

இப்போது $r_1 - (r_1 - r' + \alpha) = r' - \alpha < 0 \quad \because r' < \alpha$

$\therefore \quad r_1 < r_1 - r' + \alpha$

இப்போது $r'' - r' < r_2 - r_1$

$\rightarrow \quad \alpha - r' < r_2 - r_1 \quad \because \quad \alpha < r''$

$\rightarrow \quad r_1 - r' + \alpha < r_2$

[அல்லது, $(r_1 - r' + \alpha) - r_2 = (\alpha - r') - (r_2 - r_1)$

$< (r'' - r') - (r_2 - r_1) \quad \because \quad \alpha < r''$

$< (r_2 - r_1) - (r_2 - r_1) \quad \because r'' - r' < r_2 - r_1$

அதாவது < 0]

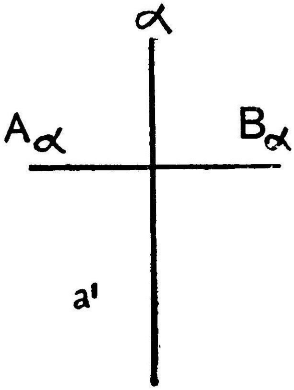
$\therefore \quad r_1 < r_1 - r' + \alpha < r_2$

$\therefore \quad m_1 < r_1 - r' + \alpha < m_2$

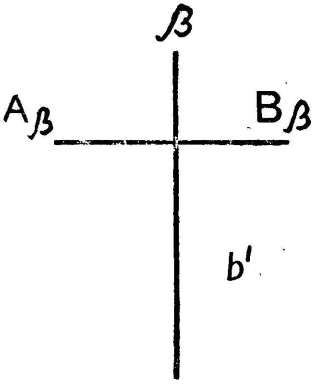
***குறிப்பு**

ஒரு விகிதமுறு எண்ணுடன் ஒரு விகிதமுறுத எண்ணைக் கூட்ட கிடைப்பது விகிதமுறுத எண் என்பதைக் கீழ்க்கண்ட வாறு நிறுவலாம்.

(A_α, B_α)-வினுல் வரையறுக்கப்பட்ட விகிதமுறுத எண் α என்க. r என்பது விகிதமுறு எண் என்க.



படம் 12



படம் 13

a என்பது $A\alpha$-ன் யாதாமொரு எண் என்க.

இப்போது வேறு ஒரு பிரிவினை (A_β, B_β) என்பதை

(i) A_β-ல் உள்ள எண்கள் அனைத்தும் $\leqq r+a$

(ii) B_β-ல் உள்ள எண்கள் அனைத்தும் $> r+a$

என்றவாறு வரையறுக்கவும்.

A_β-ம், $B\beta$-ம் வெற்றற்றவை.

A_β-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B\beta$-ன் எந்த உறுப்பையும் விடச் சிறியது.

$\therefore$ (A_β, B_β) என்பது ஒரு டெடெகின்ட் வெட்டு.

$(A_\alpha\ B_\alpha)$ என்பது விகிதமுருத வெட்டாகையால், A_α-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை. $\therefore$ a என்பது A_α-ன் உறுப்பாதலால், a ஆனது A_α-ன் மீப்பெரிய எண் ஆகாது.

$\therefore$ $r+a$ ஆனது மீப்பெரிய எண் ஆவதற்கு வாய்ப்பில்லை.

$\therefore$ $A\beta$-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை.

இப்போது b' என்பது B_β-ன் யாதாமொரு எண் என்க.

டெடெகின்ட் வெட்டுப் பண்புப்படி, $b' > r+a$.

$b' = r+b$ என்றால் $r+b > r+a$ $\therefore$ $b>a$

$\therefore$ b என்பது $B\alpha$-ல் இருக்க வேண்டும்.

$(A\alpha\ ,\ B\alpha)$ ஆனது விகிதமுருத வெட்டாதலால், b என்பது $B\alpha$-ன் மீச்சிறிய எண் இல்லை. $\therefore$ $A+b$-ம் மீச்சிறிய எண் ஆவதற்கு வாய்ப்பில்லை. $\therefore$ B_β-க்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை.

$\therefore$ A_β-க்கு மீப்பெரிய எண் இல்லை; B_β-க்கு மீச்சிறிய எண் இல்லை. $\therefore$ $(A_\beta\ ,\ B_\beta)$ என்பது β என்ற விகிதமுருத எண்ணை வரையறுக்கிறது.

$\beta = r+\alpha$ என்கிறோம்.

2. மெய்யெண்கள் கணம்

மெய்யெண்கள் எல்லாம் அடங்கிய கணத்திற்கு "மெய் யெண்கள் கணம்" என்று பெயர்.

2·1. வரம்புகள் (Bounds)

வரை இலக்கணம் 1. மெய்யெண்களை உறுப்புக்களாகவுடைய வெற்றற்ற கணம் S என்க. S-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பு s-ம் $s \leq M$ என்றவாறு M என்ற மெய்யெண் இருக்குமானால் S ஆனது மேல் வரம்புள்ளது (bounded above) என்போம். M-ஐ S-ன் மேல் வரம்பு எண் (upper bound) என்போம்.

உதாரணம் 1

$T=\{-3, 5, 9, 16\}$ என்ற முடிவுள்ள கணத்தின் மேல் வரம்பு எண் 16, அல்லது 16க்குப் பெரிய எந்த எண்ணும், உதாரணமாக 17, 18, . . . என்பவை T-ன் மேல் வரம்பு எண்களே.

உதாரணம் 2

$V=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right\}$-ன் இரு மேல் வரம்பு எண் களாவன : $\frac{6}{7}$, 1. அநேக மேல் வரம்புகளும் உண்டு.

உதாரணம் 3

$U=\{-2{\cdot}5, \ -2{\cdot}53, \ -2{\cdot}517, \ -2{\cdot}554\}$-ன் சில மேல் வரம் பெண்களாவன : $-2{\cdot}4$ -2, 0, 1.

வரை இலக்கணம் 2

மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வெற்றற்ற கணம் S என்க.

(i) L என்பது S-ன் ஒரு மேல் வரம்பு எண்.

(ii) S-ன் ஒவ்வொரு மேல் வரம்பு எண் M-க்கும், $L \leqq M$ என்றவாறு ஒரு மெய்யெண் L இருந்தால், L-ஐ S-ன் மீச்சிறிய மேல் வரம்பு எண் (least upper bound) என்போம்.

குறியீட்டு முறை: மீச்சிறிய மேல் வரம்பெண்ணை l.u.b. என்று குறியிடுவோம்.

குறிப்பு: ஒரு கணத்தின் l.u.b. ஆனது அக்கணத்தின் உறுப்பாக இருக்கலாம்; இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

உதாரணம் 1

$T = \{-3, 5, 9, 16\}$-ன் l.u.b $= 16$.

உதாரணம் 2

$$V = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{7} \right\}\text{-ன் l.u.b.} = \frac{5}{7}$$

உதாரணம் 3

$W = \{-2{\cdot}5, 2{\cdot}53, -2{\cdot}517, -2{\cdot}554\}$-ன் l.u.b. $= -2{\cdot}5$.

உதாரணம் 4

முடிவில்லாத கணம் X

$$= \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9} \ldots, \frac{n}{2n+1} \ldots \right\}\text{-ன்}$$

பொது உறுப்பு $\dfrac{n}{2n+1}$

ஒவ்வொரு இயற்கை எண் n-க்கும், $2n < 2n+1$

அதாவது $\dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{1}{2}$, ஒவ்வொரு $n \in N$

$\therefore \dfrac{1}{2}$ என்பது X-ன் ஒரு மேல் வரம்பு.

மேலும் $\dfrac{1}{2}$-க்குச் சிறிய மெய்யெண் எதுவும் X-ன் மேல் வரம்பு எண் ஆகாது. எப்படி?

$\therefore$ X-ன் l.u.b. $= \dfrac{1}{2}$. இந்த உதாரணத்தில் X-ன் l.u.b. ஆனது X-ன் உறுப்பு அல்ல.

தேற்றம் I

மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வெற்றற்ற கணம் S மேல் வரம்புள்ளதாயின் ஒரு எண் M ஆனது

(i) S-ன் எந்த உறுப்பும் M-ஐ விடப் பெரியதல்ல.

(ii) ε என்பது எவ்வளவு சிறிய நேர் எண்ணாலும், $M-\varepsilon$-க்கு அதிகமான ஒரு எண் S-ல் உள்ளது.

நிறுவல்

கணம் S ஆனது முடிவுள்ளதாகவோ அல்லது முடிவில்லாத தாகவோ இருக்கலாம்.

எல்லா மெய்யெண்களையும், S-ஐப் பொறுத்து, A, B என்று இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்கலாம்.

S-ன் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கை யுள்ள எண்கள் x என்ற எண்ணுக்கு பெரியதாக இருந்தால் x-ஐ A-ல் போடுக. அப்படி அன்றி S-ன் எந்த எண்ணும் x-ஐ விடப் பெரியதல்ல என்றால் x-ஐ B-ல் இடுக.

S ஆனது மேல் வரம்பு உடையதாயுள்ளதால், A-யிலும் B-யிலும் உறுப்புக்கள் உள்ளன. மேலும் A-ன் எந்த எண்ணும் B-ன் எந்த எண்ணையும் விடச் சிறியது. டெடெகின்டின் தேற்றத் (1·9 பார்க்க)தின்படி, இரு வகுப்புகளையும் பிரிக்கும் ஒரு எண் M என்பது

(i) M-ஐ விடச் சிறிய எண் ஒவ்வொன்றும் A-ல் இருக்கிறது.

(ii) M-ஐ விடப் பெரிய எண் ஒவ்வொன்றும் B-ல் இருக் கிறது என்றவாறு இருக்கின்றது. இந்த M தான் நம் தேற்றத்தில் காணும் M-ம் என நிறுவலாம்.

முதலில் நிறுவ வேண்டியது : M-ஐ விடப் பெரிய எண் S-ல் இல்லை. முடியுமானால், M-ஐ விடப் பெரிய எண் $M+h$ $(h>0)$, S-ல் என்றிருக்க அப்படியானால் $M+\frac{1}{2}h$ என்ற எண் M-ஐ விடப் பெரியது தான். A-ன் எந்த எண்ணும் B-ன் எந்த எண்ணையும் விடச் சிறியதாக இருக்க வேண்டுவதால், $M+\frac{1}{2}h$ என்ற எண் A-ல் இருக்க வேண்டும். $\therefore$ M ஆனது A-ஐயும் B-ஐயும் பிரிக்காது. ஏனெனில் பிரிக்கும் எண் M-ன் இலக்கண மாவது (டெடெகின்ட் தேற்றப்படி), M-ஐ விடப் பெரிய எண்

எதுவும் B-ல் தான் இருக்க வேண்டும். அதாவது $M+\frac{1}{2}h$ என்ற எண் B-ல் தான் இருக்க வேண்டும் என்பது நியமம். அப்படியில்லை என்பதால், S-ன் எந்த எண்ணும் M-க்குச் சிறியதே.

இரண்டாவதாக நிறுவ வேண்டியது : ε என்பது என்னதான் மிகச் சிறிய நேர் எண்ணானாலும், $M-\epsilon$-ஐ விடப் பெரிய எண் S-ல் உள்ளது.

$M-\epsilon$ என்ற எண் A-ல் உள்ளது.

A-ன் அமைப்புப்படி $M-\delta$-ஐ விடப் பெரியதாகக் குறைந்த பட்சம் ஒரு எண்ணாவது இருக்கிறது.

குறிப்பு : இந்த தேற்றத்தின் M-க்கு மேல் வரம்பு என்று பெயர். இது S-ல் இருக்கலாம்; இல்லாமலும் இருக்கலாம். S ஒரு முடிவுள்ள கணமானால், M ஆனது S-ல் இருக்கும். S ஆனது முடிவில்லாததாயின், M ஆனது S-ல் இருக்க வேண்டிய கட்டாயம் இல்லை.

தேற்றம் 2

S என்பது மேல் வரம்புள்ள வெற்றற்ற மெய்யெண்கள் கணமானால் S-க்கு l.u.b. இருக்கிறது.

நிறுவல்

மெய்யெண்களை A, B என்னும் இரு வகுப்புகளாகக் கீழ்க் கண்டவாறு பிரிக்கவும். α என்ற எண்ணைவிடப் பெரியதான எண் S-ல் இருக்குமானால் α-ஐ A-ல் போடவும். A-ல் இல்லாத மெய்யெண்களை B-ல் போடுக. அதாவது B-ன் எந்த எண்ணும் S-ன் எந்த உறுப்பையும் விடப் பெரியது.

A-ன் எந்த உறுப்பும் S-க்கு மேல் வரம்பாகாது. ஆனால் B-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் S-ன் மேல் வரம்பாகும்.

இப்போது " B-யில் மீச்சிறிய எண் இருக்கிறது," என்று காண்பித்தால் "S-க்கு l. u. b. இருக்கிறது" என்று நிறுவினோமாவோம்.

டெடெகின்ட் தேற்றத்தைப் (1·9) பயன்படுத்துவோம்.

S வெற்றற்ற கணமாவதால், S-ல் குறைந்த பட்சம் ஒரு உறுப்பாவது—இதனை x என்க—இருக்கிறது. ∴ ஒவ்வொரு $\alpha<x$ ஆனது A-ல் இருக்கிறது. S ஆனது மேல் வரம்புள்ளதால் S-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும் பெரியதான எண் y இருக்கிறது.

∴ γ ஆனது *B*-ல் உள்ளது.

∴ ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் குறைந்தது ஒரு எண்ணுவது இருக்கிறது. ஒவ்வொரு எண்ணும் யாதானும் ஒரு வகுப்பில் இருக்கிறது. *A*-ன் ஒரு எண் α என்றால், α-ஐ விடப் பெரிய தான எண் — இதனை x என்க — *S*-ல் இருக்கிறது.

B-ன் ஒரு எண் β என்றால், $x \leqq \beta$

∴ *A*-ன் எல்லா α-க்கும், *B*-ன் எல்லா β-க்கும், $\alpha < \beta$.

∴ கீழ் வகுப்பு *A*-ன் ஒவ்வொரு எண்ணும் மேல் வகுப்பு *B*-ன் ஒவ்வொரு எண்ணை விடச் சிறியது.

∴ டெடெகின்ட் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளும் நிறைவேற்றப்பட்டன.

∴ ஒரு எண் γ என்பது

(i) γ-ஐ விடச் சிறிய எண் ஒவ்வொன்றும் கீழ் வகுப்பு *A*-ல் உள்ளது.

(ii) γ-ஐ விடப் பெரிய எண் ஒவ்வொன்றும் மேல் வகுப்பு *B*-ல் உள்ளது என்றவாறு இருக்கிறது.

γ ஆனது *A*-ல் இருந்தால், γ தான் *A*-ன் மீப்பெரிய எண். γ ஆனது *B*-ல் இருந்தால் அதுதான் *B*-ன் மீச்சிறிய எண் இவற்றில் ஏதாவதொன்றுதான் நிகழலாம்.

இப்போது γ ஆனது *A*-ல் உள்ளது எனக் கொள்க.

∴ $\gamma < x$ என்றவாறு *S*-ல் ஒரு x இருக்கிறது.

$\gamma < \gamma' < x$ என்றவாறு γ' என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்க. $\gamma' < x$, என்பதால் γ' ஆனது *A*-ல் உள்ளது.

∴ γ ஆனது *A*-ன் மீப்பெரிய எண் இல்லை.

∴ γ ஆனது *B*-ன் மீச்சிறிய எண் ஆகும்.

∴ γ ஆனது *S*-ன் l.u.b. ஆகும்.

குறிப்பு: எல்லா மெய்யெண்களும் அமைக்கும் களம் **R**-ன் ஒவ்வொரு வெற்றற்ற கணத்தின் ஒரு மேல் வரம்பு **R**-லும் அக்கணத்தின் l.u.b.-ம் **R**-ல் இருப்பதால், **R**-ஐ "முற்றிய வரிசைப் பட்ட களம்" (Complete ordered field) என்போம்.

கிளைத் தேற்றம்

மெய்யெண்களின் ஒவ்வொரு வெற்றற்ற மேல் வரம்புள்ள கணத்திற்கும் ஒரே ஒரு l.u.b. தான் இருக்கிறது.

கொடுக்கப்பட்ட கணத்தை S என்க.

முடியுமானால் S-ன் இரு l.u.b.-கள் L, L' என்க.

வரை இலக்கணப்படி, $L' \leq L$ (S-ன் l.u.b., L')

$L \leq L$ (S-ன் l.u.b., L)

$\therefore\ L = L'$

$\therefore$ S-க்கு ஒரே ஒரு l.u.b. தான் இருக்கிறது.

வரை இலக்கணம் 3

மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வெற்றற்ற கணம் S-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பு s-க்கும், $s \geq m$ என்றவாறு m என்ற மெய்யெண் இருக்குமானால், S ஆனது கீழ் வரம்புள்ளது (bounded below) என்போம். m-ஐ S-ன் கீழ் வரம்பெண் (lower bound) என்போம்.

வரை இலக்கணம் 4

மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வெற்றற்ற கணம் S என்க.

(i) g என்பது S-ன் ஒரு கீழ் வரம்பெண்.

(ii) S-ன் ஒவ்வொரு கீழ் வரம்பெண் m-க்கும் $g \geq m$ என்றவாறு ஒரு மெய்யெண் g இருந்தால் g-ஐ S-ன் மீப்பெரிய கீழ்வரம்பெண் (greatest lower bound) என்போம்.

குறியீட்டு முறை

மீப்பெரிய கீழ் வரம்பெண்ணை g.l.b. என்று குறியிடுவோம்.

குறிப்பு : ஒரு கணத்தின் g.l.b. ஆனது அக்கணத்தின் உறுப்பாக இருக்கலாம்; இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

வரை இலக்கணம் 5

மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வெற்றற்ற கணம் மேல், கீழ் வரம்புள்ளதாயின் அக்கணத்தை "வரம்புள்ள கணம்" என்று பொதுவாகச் சொல்லுவோம்.

உதாரணங்கள்

(1) $U = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$-ன்

ஒரு கீழ் வரம்பெண் $\frac{1}{2}$, மேல் வரம்பெண் 1

(2) $U = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots, \frac{n}{n^2+1}, \ldots\right\}$ -ன்

ஒரு கீழ் வரம்பெண் 0, மேல் வரம்பெண் $\frac{1}{2}$

(3) $U = \left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right\}$-ன்

ஒரு கீழ் வரம்பெண் 1, மேல் வரம்பெண் 2

(4) $U = \left\{\frac{2}{1}, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \ldots, \frac{n^2+1}{n^2}, \ldots\right\}$-ன்

ஒரு கீழ் வரம்பெண் 1, மேல் வரம்பெண் 2

(5) $U = \left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right\}$-ன்

g.l.b. = 1. எப்படி ?

முதலில் U-ன் கீழ் வரம்பெண் 1 என்றும் பிறகு 1-ஐ விடப் பெரிய எந்த எண்ணும் U-ன் கீழ் வரம்பெண் ஆகாது என்றும் காண்பிக்க வேண்டும்.

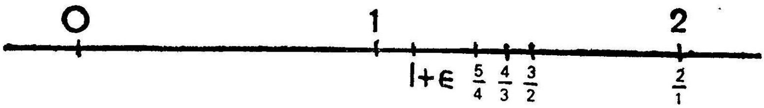
ஒவ்வொரு இயற்கை எண் n-க்கும்

$$n+1>n$$

$$\therefore \quad \frac{n+1}{n}>1$$

$\therefore$ U-ன் ஒரு கீழ் வரம்பெண் 1 ஆகும்.

1-ஐ விடப் பெரிய எண் $1+\epsilon$ என்க; ϵ என்பது யாதாமொரு மிகமிகச் சிறிய நேர் மெய்யெண்.



படம் 14

$\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} < \epsilon, \quad n > \frac{1}{\epsilon}$ என்ருல்தான்.

$n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண்ணை எடுத்துக்கொள்.

$$\therefore \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

$$1 + \frac{1}{n_0} - 1 < \epsilon$$

$$\frac{n_0 + 1}{n_0} - 1 < \epsilon$$

$$\therefore \frac{n_0 + 1}{n_0} < 1 + \epsilon$$

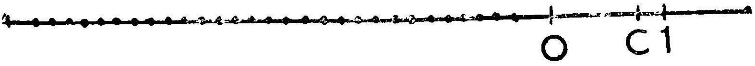
அதாவது, $1+\epsilon$-ஐவிடச் சிறிய உறுப்பு U-ல் இருக்கிறது.

$\therefore$ 1 என்பது U-ன் g.l.b.

இதுபோல்

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots, \frac{n}{n^2+1} \ldots \right\}\text{-ன் g.l.b.}$$

(6) S ; 1-ஐவிடச் சிறிய மெய்யெண்கள் எல்லாவற்றையும் கொண்ட கணம்.



படம் 15

S-ன் ஒரு மேல் வரம்பெண் $C < 1$ என்க.

$$\therefore C < \frac{C+1}{2} < 1$$

$\frac{C+1}{2} < 1$ என்ற மெய்யெண் S-ஐச் சேர்ந்தது.

$C < \frac{C+1}{2}$ என்பதால், C-ஐ விடப்பெரிய மெய்யெண் S-ல் உள்ளதெனக் காண்பித்து விட்டோம்.

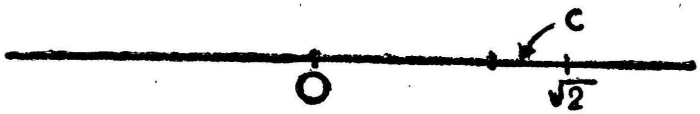
$\therefore$ 1-ஐவிடச் சிறிய எண் எதுவாயிருப்பினும், அதைவிடப் பெரிய எண் S-ல் இருக்கிறது.

$\therefore$ 1 தான் S-ன் l.u.b.

(7) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$-ன் l.u.b. 1, g.l.b. 0.

(8) குறையற்ற (Non-negative) எண்கள் எல்லாவற்றையும் கொண்ட கணம் மேல் வரம்பற்றது; ஆனால் கீழ் வரம்புள்ளது. g.l.b. = 0. l.u.b. இல்லை.

(9) **Q**; விகிதமுறு எண்கள் கணம் முற்றிய வரிசைப்பட்ட களமாகாது என்பதற்கு ஒரு உதாரணம்: $\sqrt{(2)}$ ஐவிடச் சிறிய எல்லா விகிதமுறு எண்கள் அமைக்கும் கணம் S என்க. $1 \in S$ ∴ $S \neq \phi$. S-ன் மேல் வரம்பெண்கள் 2, 10, . . . இவை விகிதமுறு எண்களே.



படம் 16

$\sqrt{(2)}$-ம் ஒரு மேல் வரம்பெண்தான், ஆனால் $\sqrt{(2)}$ l.u.b. ஆகுமா? ஆகும். $\sqrt{(2)}$-ஐ விடச்சிறிய யாதாமொரு மெய்யெண் C-ஐ எடுத்துக் கொள்க. முடியுமானால் C-ஐ $\sqrt{(2)}$-ஐவிடச் சிறிய மேல் வரம்பெண் என்க. C-க்கும் $\sqrt{(2)}$-க்கும் இடையே முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

∴ S-ன் l.u.b. $= \sqrt{(2)}$.

ஆனால் $\sqrt{(2)}$ என்பது விகிதமுறு எண் அல்ல.

F என்ற வரிசைப்பட்ட களத்தின் ஒவ்வொரு வெற்றற்ற களத்தின் ஒரு மேல் வரம்பெண் F-ல் இருந்து l.u.b.-ம் F-லேயே இருந்தால், F-ஐ முற்றிய வரிசைப்பட்ட களம் (Complete ordered field) என்போம்.

எடுத்துக்கொண்ட உதாரணத்தில், **Q**-ன் வெற்றற்ற விகிதமுறு எண்கள் கணம் S-ன் பல மேல் வரம்புகள் **Q**-ல் இருப்பினும் S-ன் l.u.b. $\sqrt{(2)}$ ஆனது விகிதமுருத எண் ஆனதால், அது **Q**-ல் அல்லவே? ∴ **Q** ஒரு முற்றிய வரிசைப்பட்ட களமாகாது.

(10) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஏதாவதொரு விகிதமுறு எண் கணத்தின் l.u.b. ஆகக் கருதலாம் என்பதற்கு இதோ ஒரு உதாரணம்.

ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் முடிவற்ற தசம முறையில் எழுதலாம். தசம முறை முடிந்தாலும் கடைசி எண்ணுடன் அநேக பல (infinitely many) பூச்சியங்களைச் சேர்க்க முடிவற்ற தசம முறை கிடைக்கிறது.

உதாரணமாக விகிதமுறுத எண் $\pi = 3 \cdot 14159 \ldots$, என்பதை எடுத்துக் கொள்வோம் இதிலிருந்து

$$S = \{ 3,\ 3 \cdot 1,\ 3 \cdot 14,\ 3 \cdot 141,\ 3 \cdot 1415,\ \ldots \}$$

என்ற கணத்தை அமைக்கவும். π-ன் அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புகள்தாம் S-ன் உறுப்புக்கள். S-ன் பல மேல் வரம்பெண் களில் 4-ம் ஒன்று, மெய்யெண்களின் களமானது வரிசைப்பட்ட முற்றிய களமாதலின், S-க்கு ஒரு மெய்யெண் l.u.b. ஆக அமையும். இதைத்தான் π என்பது. $\therefore$ $3 \cdot 14159 \ldots$ என்ற முடிவில்லாத தசம எண்ணைக் குறிப்பதுதான் மேற்கண்ட l.u.b.

மாதிரி கணக்குகள்

(1) முடிவில்லாத திரும்பாத தசம எண்ணானது விகிதமுறுத எண்ணைக் குறிக்கின்றது என்பதை டெடெகின்ட் வெட்டின் வழி நிறுவுக.

விடை

கொடுக்கப்பட்ட தசம எண் $m = a \,.\, d_1\, d_2, d_3, d_4, \ldots d_i, \ldots$
$(d_1 \neq d_2 \neq d_4 \neq \ldots \neq d_i \neq \ldots)$

அதாவது $a + \dfrac{d_1}{10} + \dfrac{d_2}{10^2} + \dfrac{d_3}{10^3} + \ldots + \dfrac{d_i}{10^i} + \ldots$

இப்போது

$$a + \frac{d_1}{10},\ a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2},\ a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3},\quad \ldots\ldots(I)$$

$$\ldots,\ a + \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10^3},\ a + \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10^2},\ a + \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10},$$

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{1}{10^2},$$

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{1}{10^3},\ \ldots\ldots(II)$$

என்ற இரு எண் தொடர்களை எடுத்துக்கொள்க. (I)-லும், (II)-லும் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதவை. (I)-ல் உள்ள

எண்கள் A என்ற வகுப்பையும், (II)-ல் உள்ள எண்கள் B என்ற வகுப்பையும் அமைக்கட்டும்.

A-ம் B-ம் வெற்றற்றவை.

A-ல் உள்ளவையும், B-ல் உள்ளவையும் விகிதமுறு எண்கள். ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் A-யிலோ B-யிலோ இருக்கிறது. கூடவும் A-ன் ஒவ்வொரு எண்ணும் B-ன் ஒவ்வொரு எண்ணைவிடச் சிறியது. m-ஐ விடச் சிறிய எண்கள் A-யிலும், m-ஐ விடப் பெரிய எண்களும் B-யிலும் உள்ளன. A-ல் மீப் பெரிய எண் இல்லை. B-ல் மீச்சிறிய எண் இல்லை. $\therefore m$ உருவாக்கிய வெட்டு விகிதமுருத எண்ணை வரையறுத்திருக்கிறது.

(2) எல்லா மெய்யெண்களையும் கொண்ட கணம், **R** என்க. மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஒவ்வொரு வெற்றற்ற கணத்தின் ஒரு கீழ் வரம்பெண் **R**-ல் இருந்தால், g.l.b-ம் **R**-ல் இருக்கிறது.

விடை

m-ஐ ஒரு கீழ் வரம்பெண்ணாகவுடைய ஒரு வெற்றற்ற கணம் S-ன் யாதாமொரு உறுப்பு s என்க.

$$\therefore \quad s \geqq m$$

$$\therefore \quad -s \leqq -m.$$

S-ன் உறுப்புக்களின் எதிர் உறுப்புக்கள் $-s$ அமைக்கும் கணம் S என்றால், S'ன் மேல் வரம்பெண் $-m$ ஆகும். முற்றிய வரிசைப்பட்ட களத்தின் இலக்கணத்தின்படி, S'க்கு l.u.b. இருக்கிறது. இதனை $-L$ என்க.

அதாவது, (i) $-L$ ஆனது S'-ன் மேல் வரம்பெண்

(ii) S'ன் ஒவ்வொரு மேல் வரம்பெண் $-m$-க்கும் $-L \leqq -M$

$\therefore \; -s \leqq -L\,;\; -L \leqq -m$ என்றால்

$$s \geqq L;\; L \geqq m$$

$\therefore$ L ஆனது S-ன் g.l.b.

$\therefore$ S-க்கு ஒரு g.l.b. இருக்கிறது.

(3) ஒரு கணத்தின் மேல் வரம்பெண் அக்கணத்தின் ஒரு உறுப்பாகவே இருந்தால், அதுவே அக்கணத்தின் l.u.b-ம் ஆகும்.

விடை

கொடுக்கப்பட்ட கணம் $S=\{s_1\ s_2\ ...,s_i ...s_k\}$ என்க. S-ன் ஒரு மேல் வரம்பெண் s_k என்க.

$$s_k \in S$$

$\therefore$ S-ன் யாதாமொரு உறுப்பு s_i என்றால்

$$s_i \leq s_k$$

S-ன் வேறேதாவது மேல் வரம்பெண் m என்றால் $s_i \leq m$; குறிப்பாக $s_k \leq m$; ஏனெனில் s_k ஆனது S-ன் ஒரு உறுப்பு. ஆனால் s_k ஆனதே ஒரு மேல் வரம்பெண். இது மற்றெல்லா மேல் வரம் பெண்களைவிடச் சிறியது.

$\therefore$ s_k ஆனது S-ன் l.u.b. ஆகும்.

(4) a, b என்பவை யாதானுமிரு நேர் மெய்யெண்கள் என்றால் $na>b$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் (அதாவது பூச்சியமற்ற நேர் முழுவெண்) உள்ளது என்று நிறுவுக.

விடை

எதிர்மறுப்பு வழி நிறுவல் (Proof by Contradiction)

R என்பது எல்லா மெய்யெண்களையும் கொண்ட கணம் என்க. a, b என்ற கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர் மெய்யெண்களுக்கு, $na>b$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் n-ம் இல்லை என்று கொள்.

அதாவது, na என்ற உருமாதிரியுள்ள பெருக்கங்களை உறுப்புக்களாகக் கொண்ட கணம் U-க்கு, ஒவ்வொரு இயற்கை எண் n-க்கும் $na \leq b$ என்ற பண்பு உண்டு. U ஆனது வெற்றற்ற கணம். முற்றிய வரிசைப்பட்ட களத்தின் இலக்கணப்படி, U-க்கு **R**-ல் l.u.b. உண்டு—இதனை c என்க.

$\therefore$ l.u.b.-ன் வரை இலக்கணப்படி U-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் c-ஐவிடச் சிறியதாகவோ அல்லது c-க்கு சமமாகவோ இல்லை.

n என்பது இயற்கை எண்ணுதலால், $n+1$-ம் ஒரு இயற்கை எண். $\therefore$ $(n+1)a$ என்ற எண் U-வில் உள்ளது.

$$\therefore\ (n+1)\ a \leq c$$

$$na+a \leq c$$

$na \leq c-a$, (ஒவ்வொரு இயற்கை எண் n-க்கும்)

$\therefore$ $c-a$ ஆனது U-வின் ஒரு மேல் வரம்பெண்.

ஆனால் $c-a<c$, $\because$ $a>0$

இது ஒரு எதிர்மறுப்பு ; ஏனெனில் l.u.b-ஐ விடச் சிறிய மேல் வரம்பெண் $C-a$ இருக்காது. ∴ தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

குறிப்பு

(1) இம்மாதிரிப் பண்புடைய வரிசைப்பட்ட கணித முறைக்கு 'ஆர்கிமிடீயன் (Archimedean) கணித முறை' என்று பெயர்.

(2) $na>b$ என்பதை $\frac{b}{n}<a$ என்றும் கொள்ளலாம்.

(5) $a^2<2$ என்றவாறு a என்ற நேர் மெய்யெண் இருந்தால் $b>a$, $b^2<2$ என்றவாறு b என்ற மெய்யெண் இருக்கிறது என்று நிறுவுக.

விடை

நிறுவல்

a என்பது நேர்மெய்யெண், $a^2<2$, கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. n என்பது இயற்கை எண்ணானல் $b=a+\frac{a}{n}$ என்ற ஒரு மெய்யெண்ணை அமைக்க ஏதாவது ஒரு n-க்கு $b>a$, $b^2<2$ என்று காண்பிக்கலாம். இயற்கை எண் என்பது பூச்சியமற்ற நேர்முழுவெண்.

$$\therefore\ n>0$$

ஏற்கனவே a ஆனது நேர் மெய்யெண்.

$$\therefore\ \frac{a}{n}>0$$

$$\therefore\ a+\frac{a}{n}>a$$

$\therefore\ b>a$, ஒவ்வொரு இயற்கை எண் n-க்கும் . . . . . . (I)

எந்த ஒரு இயற்கை எண் n-க்கும்

$$b^2=\left(a+\frac{a}{n}\right)^2=a^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$=a^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\leq a^2\left(1+\frac{3}{n}\right)\ \because\ \frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}$$

இப்போது, $a^2\left(1+\frac{3}{n}\right)<2$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் n-ஐக் கண்டுபிடித்து விட்டோமானால், நமது தேற்றம் நிறுவப் பட்டுவிடும். ஏனெனில் இந்த n-க்கு $b^2<2$ என்றாகும்.

அதாவது ஒரு n-க்கு

$1+\frac{3}{n}<\frac{2}{a^2}$, என்று காண்பிக்க வேண்டும்.

அதாவது, $\frac{3}{n}<\frac{2}{a^2}-1$ என்று காண்பிக்க வேண்டும்.

கொடுத்திருப்பது, $a^2<2$

(அதாவது) $\frac{2}{a^2}>1$

(அதாவது) $\frac{2}{a^2}-1>0$

$3>0$; $\frac{2}{a^2}-1>0$

∴ ஆர்கிமிடீயன் பண்புப்படி,

$\frac{3}{n}<\frac{2}{a^2}-1$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் n இருக்கிறது. இந்த n-க்கு

$$\frac{3}{n}+1<\frac{2}{a^2};\quad a^2\left(1+\frac{3}{n}\right)<2$$

$\therefore\ b^2\leq a^2\left(1+\frac{3}{n}\right)$, $a^2\left(1+\frac{3}{n}\right)<2$ என்றால்

$$b^2<2 \qquad \ldots\ldots \text{(II)}$$

(I)-ம், (II)-ம் சேர்ந்து, $b>a$, $b^2<2$.

(6) $a^2<2$ என்றவாறு a என்பது யாதாமொரு நேர் மெய்யெண்ணானால், $b<a$, $b^2>2$ என்றவாறு b என்ற நேர்மெய்யெண் இருக்கிறது என நிறுவுக.

விடை

நிறுவல்

$b=a-\frac{a}{n}$ (n ஒரு இயற்கை எண்) என்ற எண்ணை அமைக்க.

$$n > 1 \rightarrow \frac{a}{n} < a \rightarrow a - \frac{a}{n} > 0 \rightarrow b > 0.$$ மேலும்,

$$b - a = \left(a - \frac{a}{n}\right) - a = \frac{-a}{n} < 0 \rightarrow b < a$$

$$(\because \quad n > 1, a > 0)$$

இப்போது, $b^2 = \left(a - \dfrac{a}{n}\right)^2$

$$= a^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$= a^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\geqq a^2\left(1 - \frac{2}{n}\right), \quad n > 1 \qquad \ldots\ldots (\text{I})$$

$b^2 > 2$ என்று காண்பிக்க வேண்டுமானால்,

$a^2\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) > 2$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் n-ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

(அதாவது) $1 - \dfrac{2}{n} > \dfrac{2}{a^2}$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் n-ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

307146

(அதாவது) $1 - \dfrac{2}{a^2} > \dfrac{2}{n}$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் n-ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$a^2 > 2$ என்று கொடுத்திருப்பதால், $\dfrac{2}{a^2} < 1$

$$\therefore \; 1 - \frac{2}{a^2} > 0$$

515
KUM;2

$2 > 0, \; 1 - \dfrac{2}{a^2} > 0$ என்பதால்,

$\left(1 - \dfrac{2}{a^2}\right) > \dfrac{2}{n}$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் இருக்கிறது (ஆர்கிமிடீயன் பண்பு).

$$\therefore \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{a^2}$$

இந்த n-க்கு, $1 - \frac{2}{n} > \frac{2}{a^2} \quad \therefore a^2\left(1 - \frac{2}{n}\right) > 2 \ldots\ldots$ (II)

(I)-ன்படி, $b^2 \geqq a^2\left(1 - \frac{2}{n}\right)$,

(II)-ன்படி, $a^2\left(1 - \frac{2}{n}\right) > 2$.

$$\therefore b^2 > 2.$$

(7) மேற்கண்ட கணக்குகள் (4), (5), (6)-ஐக் கொண்டு $x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டை உறுதிப்படுத்தும் நேர் மெய்யெண் x இருக்கிறது என்று நிறுவுக.

விடை

நிறுவல்

$s^2 < 2$ என்றவாறு உள்ள எல்லா நேர் மெய்யெண்கள் s-ஐ உடைய கணம் S-ஐ எடுத்துக்கொள்க.

$1^2 < 2$ என்பதால், S-ல் 1 இருக்கிறது. மேலும் $s^2 < 2$, $2 < 2^2 \rightarrow s^2 < 2^2 \rightarrow s < 2$.

$\therefore$ 2 ஆனது S-ன் ஒரு மேல் வரம்பெண்.

முற்றிய வரிசைப்பட்ட களத்தின் இலக்கணப்படி, S-க்கு l.u.b. இருக்கிறது—இதனை x என்க.

வரிசைப்பட்ட களத்தின் விதிப்படி,

$x^2 < 2$, $x^2 > 2$, $x^2 = 2$ இவற்றில் ஏதாவதொன்றுதான் சரி.

(i) S-ன் l.u.b ஆனது x; $x^2 < 2$ என்று வைத்துக்கொள், மேற்கண்ட கணக்கு (5)-ன் படி, $b > x$, $b^2 < 2$ என்றவாறு ஒரு நேர்மெய்யெண் b இருக்கிறது. $b^2 < 2$ என்பதால், S-ல் b இருக்கிறது.

$b > x$ என்பதால், S-ன் ஒரு உறுப்பு S-ன் l.u.b.-ஐ விடப் பெரியது என்று கிடைக்கப் பெறுகிறோம். ஒரு கணத்தின் உறுப்பு அக்கணத்தின் l.u.b.-ஐ விடப் பெரியது என்பது ஒரு எதிர் மறுப்பு.

$\therefore$ "$x^2 < 2$" என்ற தற்கோள் தவறுடைத்து.

(ii) S-ன் l.u.b. ஆன x, $x^2>2$ என்றவாறு இருக்கட்டும். மேற்கண்ட கணக்கு (6)-ன்படி, $b<x$, $b^2>2$ என்றவாறு ஒரு நேர் மெய்யெண் b இருக்கிறது.

$\therefore$ S-ன் யாதாமொரு உறுப்பு s-க்கு

$s^2 < 2, 2 < b^2$ என்றால், $s^2 < b^2$

$\therefore$ $S < b$

$\therefore$ b ஆனது S-ன் மேல் வரம்பெண்.

$b < x$ என்பதால், b என்ற மேல் வரம்பெண் x என்ற l.u.b.-ஐ விடச் சிறியது என்று பொருள். நிச்சயமாக இது ஒரு எதிர் மறுப்பு.

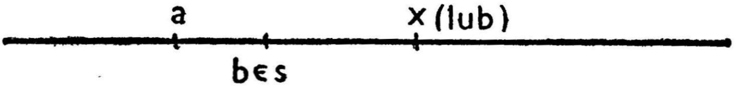
$\therefore$ " $x^2 > 2$ " என்பது தவறுடைத்து.

$\therefore$ $x^2 = 2$ என்பதுதான் சரி.

(8) எல்லா மெய்யெண்களையும் கொண்ட கணம் **R** என்க. R-ல் l.u.b. x-ஐ உடைய மெய்யெண்களின் வெற்றற்ற கணம் S என்க. $a < x$ என்றவாறு **R**-ல் யாதாமொரு எண் a என்க. $b > a$ என்றவாறு S-ல் b என்ற ஒரு எண் இருக்கிறது என நிறுவுக.

விடை

எதிர் மறுப்பு வழி நிறுவல் : நேர்க்கோட்டுத் தொடரகத்தை எடுத்துக் கொள்க.



படம் 17

a-ஐ விடப் பெரிய உறுப்பு S-ல் இல்லை எனக் கொள்க. $\therefore$ S-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் a-ஐ விடச் சிறியதாகவோ, a-க்குச் சமமாகவோ இருக்கிறது. $\therefore$ a ஆனது S-ன் மேல் வரம்பெண். இது ஒரு எதிர் மறுப்பு. ஏனெனில் $a<x$, x ஆனது S-ன் l.u.b. என்பது தேற்றத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருப்பவை.

$\therefore$ a-ஐ விடப் பெரிய உறுப்பொன்று—இதனை b என்க — S-ல் உள்ளது.

(9) a என்பது **R**-ன் ஓர் உறுப்பு என்க.

$x < a$ என்றவாறு விகிதமுறு எண்கள் x அமைக்கும் கணம் S என்க. அப்படியானால் a ஆனது S-ன் l.u.b. என்று நிறுவுக.

சுருக்கமாக, ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஏதாவது ஒரு விகிதமுறு எண்கள் கணத்தின் l.u.b. ஆகும்.

டை

நிறுவல்

S-ன் எல்லா x-க்கும், $x < a$ என்பதால், a என்பது S-ன் ஒரு மேல் வரம்பெண்.

முற்றிய வரிசைப்பட்ட களத்தின் இலக்கணப்படி, S-க்கு l.u.b. —இதனை y என்க—உள்ளது. $\therefore y \leqq a$

$y \nless a$ என்று காண்பித்தால், $y=a$ என்றாகிவிடும். $y<a$ என்று வைத்துக்கொள்.

$\therefore \; y-a<0$

(அதாவது) $a-y>0$

ஆர்கிமீடியன் பண்புப்படி, $\frac{1}{n} < a-y$, அதாவது

$y+\frac{1}{n} < a$ என்றவாறு ஒரு இயற்கை எண் n இருக்கிறது.

மேலும் $y - \frac{1}{n} < y$

சென்ற கணக்கு (8)-ன் படி

$y - \frac{1}{n} < t,\ z \leqq y$ என்றவாறு z என்ற விகிதமுறு எண் S-ல் இருக்கிறது.

$\therefore y - \frac{1}{n} < z \leqq y$

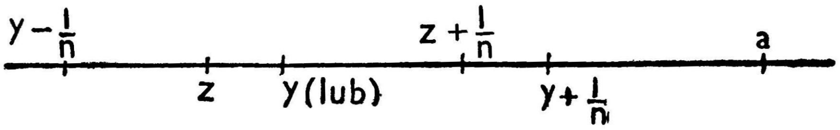
$\frac{1}{n}$ ஐக் கூட்ட, $y < z + \frac{1}{n} \leqq y + \frac{1}{n} < a$

$\therefore y < z + \frac{1}{n} < a$

$z+\frac{1}{n} < a$ என்பது a-ஐ விடச் சிறிய விகிதமுறு எண்.

$\therefore z+\frac{1}{n} \in S$. இதனுல் கிடைக்கப்பெறும் "S-ன் இந்த உறுப்பு y-ஐ விட, அதாவது, S-ன் l.u.b.-ஐ விடப் பெரியது" என்ற முடிவு l.u.b.-ன் வரை இலக்கணத்திற்குப் புறம்பானது. இது ஒரு எதிர் மறுப்பு.

$\therefore$ "$y < a$" என்பது தவறு. $\therefore y = a$.



படம் 18

(10) a, b என்பவை இரு வெவ்வேறு மெய்யெண்களானுல் $a < b$ என்ருல், $a < c < b$ என்றவாறு c என்னும் விகிதமுறு எண் உள்ளது.

விடை

நிறுவல்

$x < b$ என்றவாறு எல்லா விகிதமுறு எண்கள் x அமைக்கும் கணம் S என்க. சென்ற கணக்கு (9)-ன் படி b ஆனது S-ன் l.u.b• கணக்கு (8)-ன் படி $a<b$ என்பதால், $c>a$ என்றவாறு S-ல் ஒரு c இருக்கிறது. c என்பது விகிதமுறு எண்.

$C \in S \rightarrow c < b$ (b ஆனது S-ன் l.u.b.)

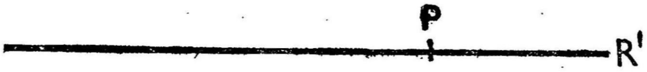
$\therefore a < c < b$, c விகிதமுறு எண்.

(11) மேற்கண்ட கணக்கு (10)-ஐப் பயன்படுத்தி, "மெய் யெண் நேர்க்கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளி P-க்கும் ஒத்த ஒரே ஒரு மெய்யெண் x இருக்கிறது" என்று நிறுவுக.

விடை

நேர்க்கோட்டில் P என்ற புள்ளிக் கொத்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணும் கொடுக்கப்படவில்லை என்று வைத்துக்கொள்க. இப்போது P-க்கு ஒத்த ஒரே ஒரு மெய்யெண் இருக்கிறது என்று காண்பிப்போம்.

P-க்கு இடது பக்கம் உள்ள புள்ளிகளுக்கொத்த எல்லா விகிதமுறு எண்களும் *L* என்ற கணத்தையும், *P*-க்கு வலது



படம் 19

பக்கம் உள்ள புள்ளிகளுக்கொத்த எல்லா விகிதமுறு எண்களும் *R* என்ற கணத்தையும் அமைக்கட்டும். இப்போது ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் *L*-லிலோ *R*-லோ ஏதாவது ஒன்றில் தான் இருக்கிறது. ஆனால் அதே எண் இரண்டு கணங்களிலும் இருக்காது. *L*-ன் l.u.b. *a* என்றும், *R*-ன் g.l.b. *b* என்றும் கொள்க. $a<b$, $a>b$, $a=b$ இவற்றில் ஏதாவதொன்றுதான் சரி. $a<b$ என்க. கணக்கு (10)-ன்படி $a<c<b$ என்றவாறு *c* என்ற விகிதமுறு எண் உள்ளது. *c* என்பது விகிதமுறு எண்ணுதலால், *c* ஆனது *L*–லிலோ, *R*-லோ இருக்கிறது—ஆனால் இரண்டிலும் ஒரே சமயத்தில் இல்லை. இது ஒரு போதும் நிகழாது; இது ஒரு எதிர் மறுப்பு. ஏனெனில், $c > a \rightarrow c \notin L$.

$$c < b \rightarrow C \notin R \qquad \therefore\ a \nless b$$

இப்போது $a > b$ என்க. $\therefore\ b<d<a$ என்றவாறு விகிதமுறு எண் *d* இருக்கிறது.

d விகிதமுறு எண், $d<a$, $d>b$ என்பதால், *d* ஆனது *L*-லிலும் *R*-லும் ஒரே சமயத்தில் உள்ளது. இது ஒரு எதிர்மறுப்பு. $\therefore\ a \ngtr b$. $\therefore\ a=b$.

ஒரு கணத்தின் l.u.b. ஒன்றே ஒன்று (unique) தான் என்பதால், புள்ளி *P*-க்கு ஒத்த ஒரே ஒரு மெய்யெண் $x=a=b$ என்பது இருக்கிறது.

2·2. தனிப் பெறுமானம் (Absolute Value)

வரை இலக்கணம்

x என்பது எந்த மெய்யெண்ணானாலும், *x*-ன் தனிப் பெறுமானத்தை—இதனை (*x*) என்று குறியிடுக,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad \ldots\ldots \text{(I)}$$

என்று வரையறுக்கலாம்.

இதையே, $x \geqq 0 \rightarrow |x| = x$, $x < 0 \rightarrow |x| = -x$ என்றும் எழுதலாம்.

$|x|$-ன் வேறு இரு வரை இலக்கணங்களாவன,

$$|x| = \sqrt{(x^2)} \qquad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

$\sqrt{(x^2)}$-ஐ x^2 ன் குறையற்ற (non-negative) வர்க்க மூலம் என்றும் $|x|$-ஐ, x-ன் தனிப் பெறுமானம் என்றும் சொல்லப் படுவன.

மிக முக்கியமான குறிப்பு

$\sqrt{(x^2)} = x$ என்பது சரியா? $x \geqq 0$ என்ருல்தான் சரி.

உதாரணமாக $x = -3$ என்ருல் $\sqrt{(x^2)} = x$ என்பது $\sqrt{(9)} = -3$ என்ருகும். ஆனுல் வரையறைப்படி, $\sqrt{(9)}$ ஆனது குறையற்ற எண் அல்லவா? $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$. ஆகையால் $\sqrt{(9)} = \pm 3$ என்று தானே இருக்க வேண்டும். குறையற்ற வர்க்க மூலத்திற்கு $\sqrt{(9)}$என்ற குறியீட்டையும், குறையுள்ள வர்க்க மூலத்திற்கு $-\sqrt{(9)}$என்ற குறியீட்டையும் பயன்படுத்துகிருேம்.

அதாவது $\sqrt{(9)} = 3$; $-\sqrt{(9)} = -3$.

உதாரணம் : " $|x| < 1$, x மெய்யெண்" என்பதைத் தீர்க்க.

விடை

வரை இலக்கணப்படி,

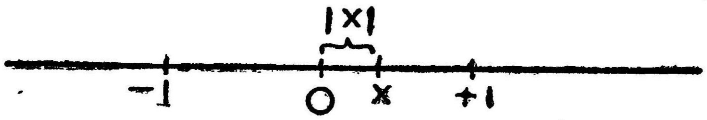
$x \geqq 0 \rightarrow |x| = x$

$x < 0 \rightarrow |x| = -x$

$\therefore\ x > 0, x < 1$ அல்லது $x < 0, -x < 1$

அதாவது $-1 < x < 1$

$\therefore\ |x| < 1$ என்ருல் $-1 < x < 1$



படம் 20

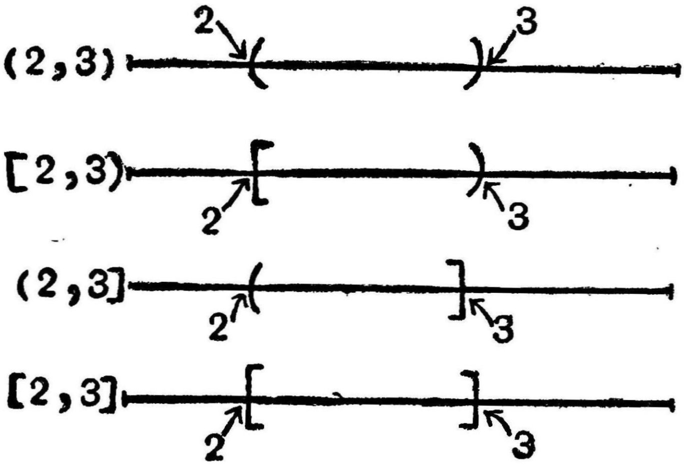
வரை இலக்கணம்

இடைவெளிகள் மெய்யெண் நேர்க்கோட்டில் யாதாமொரு துண்டு AB என்க. இத்துண்டின் முனைப் புள்ளிகள் a, b என்ற

படம் 21

எண்களைக் குறிக்கட்டும். AB-க்கு இடைவெளி (interval) என்று பெயர். முனைப் புள்ளிகள் A, B மட்டும் நீங்கிய இடைவெளிக்கு "திறந்த இடைவெளி" (open interval) என்று பெயர். இதனை (a, b) என்றும், AB-ல் x என்பது யாதாமொரு புள்ளி என்றால், $a < x < b$ என்றும் குறிப்பதுண்டு. ஆனால் முனைப்புள்ளிகள் A, B இரண்டும் சேர்ந்த இடைவெளிக்கு "மூடிய இடைவெளி" (closed interval) என்று பெயர். இதனை $[a, b]$ என்றும் AB-ல் x என்பது யாதாமொரு புள்ளி என்றால், $a \leq x \leq b$ என்றும் குறிப்பதுண்டு. ஆனால் முனைப்புள்ளி a மட்டும் நீங்கலாகவுடைய இடைவெளியை $(a, b]$ என்றும், AB-ல் x என்பது யாதாமொரு எண் என்றால் $a < x \leq b$ என்றும் குறிப்பதுண்டு. இதுபோல், முனைப் புள்ளி b மட்டும் நீங்கலாக இருந்தால் இந்த இடைவெளியை $[a, b)$ என்றும், AB-ல் யாதாமொரு புள்ளி x என்றால் $a \leq x < b$ என்றும் எழுதலாம்.

உதாரணம்

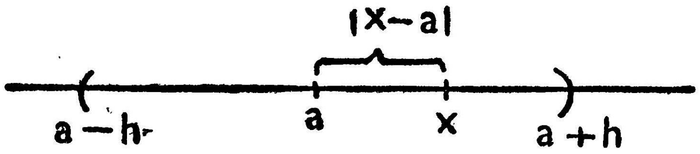


படம் 22

குறிப்பு

a ஒரு மெய்யெண், h ஒரு நேர் எண் என்றால் $|x-a| < h$-ஐ உறுதிப்படுத்தும் எல்லா எண்களின் கணம் $-h < x - a < h$ என்ற திறந்த இடைவெளி ஆகும்.

அதாவது $a - b < x < a + h$



படம் 23

அதாவது x-க்கும் a-க்கும் இடையே உள்ள தூரம் h-ஐ விடச் சிறியது. $a-h$-க்கும், $a + h$-க்கும் இடையே x என்ற புள்ளி இருந்தால் தான் $|x-a|$ என்ற தூரம் h-ஐ விடச் சிறியதாக இருக்க முடியும்.

தேற்றம் 1

$\lambda \geqq 0$ என்றால் $|x| \leqq \lambda \leftrightarrow -\lambda \leqq x \leqq \lambda$

நிறுவல்—பாகம் 1

$|x| \leqq \lambda$ என்க.

$$\left.\begin{array}{l} x \geqq 0 \rightarrow |x| = x \\ x < 0 \rightarrow |x| = -x \end{array}\right\}$$

$\therefore\ x \geqq 0,\ x \leqq \lambda,$ அல்லது $x < 0, -x \leqq \lambda,$

அதாவது $x \geqq -\lambda$

$\therefore\ -\lambda \leqq x \leqq \lambda$

பாகம் 2

$\leftarrow\ -\lambda \leqq x \leqq \lambda$ என்க.

$x > 0$ என்றால், $|x| = x \leqq \lambda.$

$x < 0$ என்றால், $|x| = -x \leqq \lambda.$

எப்படியும் $|x| \leqq \lambda.$

தேற்றம் 2

$|ab| = |a|\ |b|$

நிறுவல்

$\because \quad \pm a = |a|, \pm b = |b|,$

$\therefore \quad \pm ab = |a| \; |b|$

மேலும் $|ab| = \pm ab = \pm (a)\ (b)$

ஆனால் $|ab|$-ம் $|a| \; |b|$-ம் குறையற்றவை.

$\therefore \quad |ab| = |a| \; |b|$

தேற்றம் 3

$$a \neq 0 \rightarrow \left| \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|a|}$$

நிறுவல்

$$1 = a \cdot \frac{1}{a} = \left| a \cdot \frac{1}{a} \right| = |a| \; \left| \frac{1}{a} \right| \text{ (தேற்றம் 2-ன்படி)}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{|a|}$$

தேற்றம் 4

$-|x| \leq x \leq |x|$ என்பதை நிறுவுக.

நிறுவல்

வரை இலக்கணப்படி,

$x \geqq 0 \rightarrow |x| = x$

$\therefore \quad -|x| = -x$

ஆனால் $x \geqq 0 \rightarrow -x \leqq +x \rightarrow -|x| \leqq x$

இஃதே போல்,

$x \leqq 0 \rightarrow |x| = -x$

ஆனால் $x \leqq 0 \rightarrow x \leqq -x \rightarrow x \leqq |x|$

$\therefore \quad -|x| \leqq x \leqq |x|.$

தேற்றம் 5

$|x + y| \leqq |x| + |y|$ என்று நிறுவுக.

இதைத்தான் "முக்கோண சமனின்மை" (Triangle Inequality) என்பர்.

நிறுவல்

$$\left.\begin{array}{l} -|x| \leqq x \leqq |x| \\ -|y| \leqq y \leqq |y| \end{array}\right\}$$ மேற்கண்ட தேற்றம் 4-ன்படி.

இவ்விரு சமனின்மைகளைக் கூட்ட

$$-(|x|+|y|) \leqq x+y \leqq |x|+|y|.$$

$$\therefore \quad |x+y| \leqq |x|+|y|$$ தேற்றம் 1-ன்படி.

கிளைத் தேற்றங்கள்

(i) $|-y| = |y|$ என்பதால்

$$\therefore \quad |x-y| \leqq |x|+|y|$$

(ii) (i)-ல் $y-x$-ஐ x-க்கு பிரதியிட்டால்,

$$|x| \leqq |y-x|+|y| \rightarrow |x| \leqq |x-y|+|y|$$
$$\rightarrow |x|-|y| \leqq |x-y| \rightarrow |x-y|$$
$$\geqq |x|-|y|$$

(iii) கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி,

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leqq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$$
$$|x_1+x_2+\ldots+x_n| \geqq |x_1|-|x_2|-\ldots-|x_n|$$

2·3. மெய் நேர்கோட்டின் புள்ளி கணங்கள் இயல் (Point-set Theory)

மெய் நேர்கோட்டில் (Axis of Reals, Real number scale, Real line) முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள் உண்டென்றும், ஒவ்வொரு புள்ளிக் கொத்த ஒரு மெய்யெண் உண்டென்றும் படித்தோம்.

வரை இலக்கணம் 1

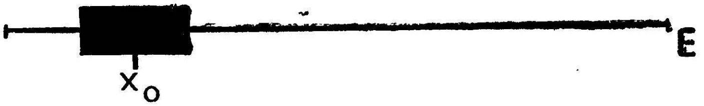
ஒரு புள்ளியின் அண்மை (Neighbourhood of a Point)

ஒரு புள்ளி கணம் E-ன் புள்ளி x_0-ன் அண்மையாவது, h என்பது ஒரு சிறிய நேர் எண்ணானால்,

$$x_0 - h < x < x_0 + h$$

என்றவாறு அமைந்திருக்கும் x புள்ளிகள் கொண்ட கணமாகும்.

$x_0 - h$, $x_0 + h$ என்ற புள்ளிகளின் இடையே உள்ள —ஆனால் இவ்விரு புள்ளிகள் நீங்கலாக — எல்லாப் புள்ளிகளையும்



படம் 24

கொண்டதுதான் x_0-ன் அண்மை. h-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும், x_0-ன் ஒரு அண்மை கிடைக்கிறது.

வரை இலக்கணம்

திறந்த கணம் : ஒரு புள்ளி கணம் E-ன் ஒவ்வொரு புள்ளி x_0-ன் அண்மையும் E-ல் முழுமையாக இருந்தால், E-க்குத் திறந்த கணம் என்று பெயர்.

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) திறந்த இடைவெளி $a<x<b$. ஒரு திறந்த கணமாகும்.

படம் 25

(2) $0<r<1$ என்றவாறு அமைந்த எல்லா விகிதமுறு எண்களும் அடங்கிய கணம் திறந்ததல்ல. ஏனெனில் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணின் அண்மையில் முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள விகிதமுறு எண்களைத் தவிர விகிதமுருத எண்களும் உள்ளன.

(3) மெய் நேர்கோட்டில், $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

என்ற எண்களைத் தவிர மற்றெல்லா எண்களையும் கொண்ட கணம் திறந்ததல்ல. ஏனெனில் இக்கணத்தில் 0-ன் அண்மையில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் நீக்கப்பட்டு விட்டனவே!

வரை இலக்கணம்

நிரப்பி கணம் (Complement of a set) : மெய் நேர்கோட்டின் ஒரு புள்ளி கணம் S என்றால், அந்நேர்கோட்டின் S-ல் இல்லாத எல்லாப் புள்ளிகளையும் கொண்ட கணத்திற்கு S-ன் நிரப்பி கணம் என்று பெயர். இதனை $C(S)$ என்று குறியிடுவர்.

(உதாரணம்) S-ஆனது $a < x < b$ என்ற திறந்த இடைவெளியானால் $C(S)$ என்பது $x \leqq a$ என்றவாறும், $x \geqq b$ என்றவாறும் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளைக் கொண்ட கணமாகும்.

வரை இலக்கணம்

மூடிய கணம் (Closed set): ஒரு கணத்தின் நிரப்பி ஆனது திறந்ததாயிருந்தால் அந்த கணத்தை மூடிய கணம் (closed set) என்பர்.

குறிப்பு

ஒரு கணம் மூடியதாயில்லையாயின் அது திறந்ததாயிருக்க வேண்டுவதில்லை. அதுபோல் திறந்ததாயில்லையாயின் அது மூடியிருக்க வேண்டுவதில்லை.

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) மூடிய இடைவெளி $a \leqq x \leqq b$ ஆனது மூடிய கணமாகும்.

(2) $S : 0 < x \leqq 1$ என்ற கணம் மூடியதுமல்ல ; திறந்ததுமல்ல.

படம் 26

1-ன் எந்த அண்மையும் S-ல் அடங்கவில்லை. ∴ S ஆனது திறந்த கணமல்ல. 0-ன் எந்த அண்மையும் $C(S)$-ல் இல்லை.

∴ $C(S)$ ஆனது திறந்தல்ல.

∴ S ஆனது மூடியதல்ல.

(3) மெய் நேர்கோட்டின் முழுமையும் திறந்த கணம்தான். இதன் நிரப்பி கணம் வெற்று கணம்.

வெற்று கணத்தை திறந்த கணமாகக் கொள்வது மரபு.

∴ மெய் நேர்கோட்டின் முழுமையும் மூடிய கணம்.

∴ மெய் நேர்கோட்டின் முழுமையானது ஒரே சமயத்தில் திறந்ததும் மூடியதுமாகும்.

இதுபோலவே வெற்று கணமும் திறந்ததும் மூடியதுமாகும்.

வரை இலக்கணம்

ஒரு கணத்தின் திரட்சிப் புள்ளி (Accumulation Point, limit point)

S என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி கணம் என்க. y என்ற புள்ளியின்—இந்தப் புள்ளி S-ல் இருக்க வேண்டிய கட்டாயமில்லை—ஒவ்வொரு அண்மையில், y-ஐத் தவிர S-ன் குறைந்த பட்சம் ஒரு புள்ளியாவது இருக்குமானல் y-க்கு S-ன் "திரட்சிப் புள்ளி" என்று பெயர்.

மாற்று வரை இலக்கணம்

S என்பது மெய்யெண்களின் கணம் என்றும், ϵ என்பது நம் விருப்பம்போல் மிகமிகச் சிறிய நேர்மெய்யெண் என்றும், C என்பது ஒரு மெய்யெண் என்றும் கொள்க. ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-க்கும், $|x - C| < \epsilon$ என்றவாறு S-ல் "முடிவில்லாத அநேக பல" (infinitely many) எண்கள் இருந்தால், C ஆனது S-ன் "திரட்சிப் புள்ளி" எனப்படும்.

குறிப்பு: "திரட்சிப் புள்ளி"யை, "வரம்புப் புள்ளி" என்போரும் உளர்.

உதாரணங்கள்

(1) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ என்ற கணத்தின் திரட்சிப் புள்ளி 0 ஆகும்.

(2) ஒரு மெய்யெண்ணின் அண்மையில் முடிவில்லாத அநேக பல (infinitely many) விகிதமுறு எண்களும், விகிதமுருத எண்களும் இருப்பதால், விகிதமுறு எண்கள் கணத்திற்கு ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் திரட்சிப் புள்ளியே.

(3) ஒரு முடிவுள்ள கணத்திற்குத் திரட்சிப் புள்ளியே கிடையாது. ஏனெனில் S என்பது முடிவுள்ள கணம்; y என்பது யாதாமொரு புள்ளி என்ருல் y-ன் அண்மையில் S-ன் ஒரு புள்ளியும் இராதவாறு அந்த அண்மையை அமைக்கலாம்.

(4) மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியும் திறந்த இடைவெளியின் எல்லாப் புள்ளிகள் அமைக்கும் கணத்தின் திரட்சிப் புள்ளியாகும்.

முக்கியமான குறிப்பு

திரட்சிப் புள்ளிக்கான வரை இலக்கணத்தில், y-ன் ஒவ்வொரு அண்மையிலும் S-ன் குறைந்த பட்சம் ஒரு புள்ளியாவது இருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனையானது "S-ன் ஒரு புள்ளி மட்டுமல்ல முடிவில்லாத அநேக பல புள்ளிகளும் இருக்க வேண்டும்" என்ற முடிவைத் தரும். எப்படியெனில் திரட்சிப் புள்ளி y-ன் ஒரு அண்மை N, என்றும், x_1 என்பது N_1-ல் S-ன் ஒரு புள்ளி என்றும், $x_1 \neq y$ என்றும் கொள்க. இப்போது y-ன் மற்ரொரு அண்மை N_2-ஐ x_1 ஆனது N_2-ல் இல்லாதவாறு முன்னிலும் சிறியதாக அமைக்க வரை இலக்கணத்தின் கட்டுப் பாட்டின் படி N_2-ல் $x_2 \neq y$ என்றவாறு S-ல் x_2 என்ற புள்ளி இருக்க வேண்டும்.

இந்த செய்முறையைத் திரும்பித் திரும்பச் செய்தோமானால் முன்னதைவிடப் பின்னது சிறியது என்ற வகையில் y-ன் அண்மை கள் $N_3, N_4, \ldots$ என்பவற்றை அமைப்பதோடன்றி, S-ன் புள்ளிகள் $x_3, x_4, \ldots$ எல்லாம், x_k என்ற புள்ளி N_k-ல் இருந்தால், N_{k+1}-ல் இருக்காது என்றவாறும் $x_k \neq y$ என்றவாறும் கிடைக்கப் பெறு வோம். இந்த வெவ்வேறு புள்ளிகள் $x_1, \ldots x_k, \ldots$ யாவும் முதல் அண்மை N_1-ல் இருப்பன.

மூடிய கணத்திற்கும், திரட்சிப் புள்ளிக்கும் உள்ள ஒரு முக்கிய மான தொடர்புதான் என்ன ?

கீழ்கண்ட தேற்றம் அதனைத் தெளிவாக புலப்படுத்துகிறது.

தேற்றம்

கொடுக்கப்பட்ட கணம் S-ன் ஒவ்வொரு திரட்சிப் புள்ளியும் S-ன் உறுப்பானால், S-ஆனது மூடிய கணமாகும்.

மறுதலையாக, கொடுக்கப்பட்ட கணம் S-ஆனது மூடிய கணமானால் S-ன் ஒவ்வொரு திரட்சிப் புள்ளியும் S-ன் உறுப்பே.

நிறுவல்—பாகம் 1

தற்கோள் : "S-ன் ஒவ்வொரு திரட்சிப் புள்ளியும் S-ல் இருக் கட்டும்". S, மூடிய கணம் இல்லையானால், $C(S)$ திறந்ததல்ல ; $C(S)$ திறந்த கணம் இல்லையானால், $C(S)$-ல் ஒரு புள்ளி y ஆனது, y-ன் அண்மை முழுமையாக $C(S)$-ல் இல்லை, என்றவாறு உள்ளது. y-ன் அண்மையானது $C(S)$-ல் முழுமையாக இருக்கத் தவறினால் அந்த அண்மையில் S-ன் ஒரு புள்ளி கட்டாயம் இருக்கவேண்டும்.

y ஆனது $C(S)$-ல் இருப்பதால், S-ன் புள்ளி y-ஆக இருக்கமுடியாது. ஆதலால், $C(S)$ திறந்ததில்லையானல் அதில் y என்ற புள்ளி யானது, y-ன் ஒவ்வொரு அண்மை, S-ன் ஒரு புள்ளியைக் கொண் டிருக்கும், என்றவாறு இருக்கும். ∴ y ஆனது S-ன் திரட்சிப் புள்ளியாகும். இது, "S-ன் ஒவ்வொரு திரட்சிப் புள்ளியும் S-ல் இருக்கிறது" என்ற தற்கோளின் எதிர்மறுப்பு. ∴ $C(S)$ ஆனது திறந்த கணமாக இருக்க வேண்டும்; ∴ S ஆனது மூடிய கணமாக வேண்டும்.

பாகம் 2

மறுதலை : S ஆனது மூடிய கணம் என்க. y ஆனது S-ன் யாதாமொரு திரட்சிப் புள்ளி என்ருல் S-ல் y இருக்கிறது என்று காண்பிக்க வேண்டும். அப்படியில்லையெனில், yஆனது, $C(S)$-ல் இருக்க வேண்டும். S மூடிய கணமாதலால், $C(S)$ ஆனது திறந்த கணம் ஆகும். ∴ y-ன் அண்மையும் கூட $C(S)$-ல் முழுமையாக இருக்கும். இம்மாதிரியான அண்மை S-ன் எந்தப் புள்ளிகளையும் கொண்டிருக்காது. ∴ y ஆனது S-ன் திரட்சிப் புள்ளியாக இருக்க முடியாது. இது ஒரு எதிர்மறுப்பு. ∴ y ஆனது S-ல் இருக்க வேண்டும்.

தேற்றம்

வையர்ஸ்ட்ராஸ் (Weierstrass) அல்லது **பொல்ஸானே வையர் ஸ்ட்ராஸ் (Bolzano-Weierstrass)**

[பெர்னர்ட் பொல்ஸானே (1781—1848) என்ற ப்ரேக் (Prague) நாட்டு கணித மேதை புள்ளிக் கணங்களைப்பற்றியும் பகுவியலின் அடிப்படை பொருள்களைப் பற்றியும் செவ்விய முறையில் ஆராய்ந்துள்ளார். கார்ஸ் வையர்ஸ்ட்ராஸ் (1815—1897) என்ற ஜெர்மானியர் 19ம் நூற்ருண்டின் தலைசிறந்த கணித மேதைகளுள் ஒருவராவர்.]

தேற்றம்

வரம்புள்ள முடிவில்லாத மெய்யணிகள் கணத்திற்குக் குறைந்த பட்சம் ஒரு திரட்சிப் புள்ளியாவது இருக்கிறது.

நிறுவல்

முடிவில்லாத வரம்புள்ள கணம் E-ன் மேல் வரம்பெண் M என்றும் கீழ்வரம்பெண் m என்றும் கொள்க. E-ஐப் பொறுத்து எல்லா மெய்யெண்களையும் A, B என்ற இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்கவும். E-ன் முடிவில்லாத அநேகப் பல எண்கள் x என்ற

மெய்யெண்ணைவிடப் பெரியனவாக இருந்தால் x-ஐ A-ல் போடுக. அப்படியில்லாவிடில் x-ஐ B-க்குச் சொந்தமாக்குக.

இப்போது ஒவ்வொரு எண்ணுக்கு ஒத்த ஒரு வகுப்பு உள்ளது. கீழ்வரம்பெண் m ஆனது A-யிலும் மேல் வரம்பெண் M ஆனது B-யிலும் உள்ளதால் இரு வகுப்புகளிலும் எண்கள் உள்ளன. மேலும் A-ன் எந்த எண்ணும் B-ன் யாதாமொரு எண்ணைவிடச் சிறியதாகவே உள்ளது.

$\therefore$ டெடெகின்ட் தேற்றத்தின்படி இரு வகுப்புகளையும் பிரிக்கும் எண்—இதனை y என்க—இருக்கிறது. நம் விருப்பம் போல் எவ்வளவு சிறியதாக வேண்டுமோ அத்துணை சிறியதாக ϵ என்ற நேர் எண் ஒன்றை எடுத்துக்கொள்க. $\therefore$ $y-\epsilon$ என்ற எண் A-யிலும், $y+\epsilon$ என்ற எண் B-யிலும் உள்ளன.

$\therefore$ $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ என்ற இடைவெளியில் E-ன் முடிவில்லாத அநேக பல எண்கள் உள்ளன.

$\therefore$ y ஆனது E-ன் திரட்சிப் புள்ளி.

3. ஒழுங்கு வரிசைகள்
(Sequences)

3·1. வரை இலக்கணம் 1—ஒழுங்கு வரிசை

நேர்முழு எண்கள் கணத்தை வரையறை அரங்கமாகக் கொண்ட கோத்தல் f-க்கு "ஒழுங்கு வரிசை" (Sequence) என்று பெயர்.

n என்பது நேர்முழு எண் என்ருல் $f(n)$-ஐ "ஒழுங்கு வரிசை"யின் n-வது உறுப்பு (nth term) என்போம். "ஒழுங்கு வரிசை" ஆனது ஒரு "கோத்தல்" என்று அறிக.

ஒழுங்கு வரிசைகளைப் பல்வேறு வகைகளில் குறியிடலாம். ஒவ்வொரு நேர் முழுவெண் n-க்கும் ஒத்த n-வது உறுப்பு இருக்கிறது. என்பதால், ஒரு ஒழுங்கு வரிசைக்கு முதல் உறுப்பு, இரண்டாவது உறுப்பு, மூன்ருவது உறுப்பு, . . . , என்றவாறு இருக்கின்றன.

n-வது உறுப்பை s_n , ($s_n = f(n)$) என்று குறியிட்டால், ஒழுங்கு வரிசையை s_1, s_2, . . . , s_n, . . . என்ரே அல்லது சுருக்கமாக $\{s_n\}$ என்ரே குறியிடலாம். உதாரணமாக, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, . . . என்ற ஒழுங்கு வரிசையை $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ என்று குறியிடலாம். ஒவ்வொரு நேர்முழு எண் n-க்கும், n-வது உறுப்பு இருந்தால்தான், ஒழுங்கு வரிசை முழுமையாக நிச்சயிக்கப் பட்டுள்ளது என்று பொருள்.

s, t என்பவை இரு ஒழுங்கு வரிசைகள் என்க.

ஒவ்வொரு நேர்முழு எண் n-க்கும், $s_n = t_n$ என்ருல்தான், $s = t$.

முடிவுள்ள ஒழுங்கு வரிசையில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளும், முடிவில்லாத ஒழுங்கு வரிசையில் முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளும் உள்ளன.

விளக்க உதாரணங்கள்

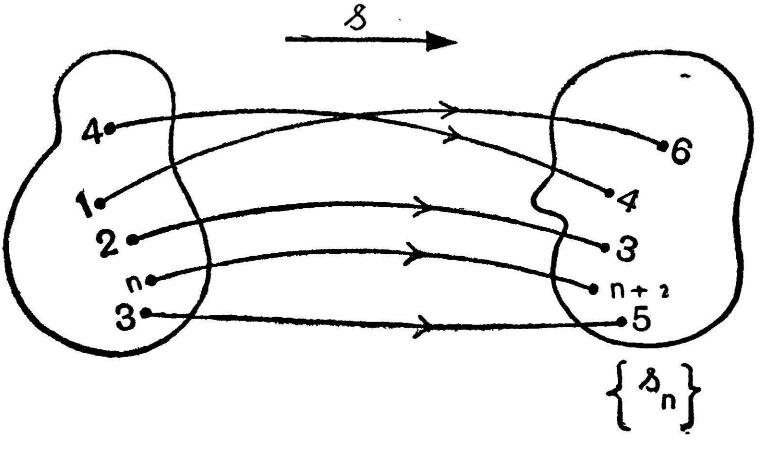
(1) $s_n = n+2$ என்றால்

$\{s_n\} = \{n+2\}$

$\therefore\ s_1 = 1+2 = 3;\ s_2 = 2+2 = 4$ முதலியன.

$\therefore\ \{s_n\} = \{3, 4, 5, \ldots (n+2) \ldots\}$ என்று வரிசைக் கிரமமாக எழுத வேண்டும்.

s-ஐக் கோத்தல் என்றோமா? s-ன் விளக்கப்படம்.



முடிவில்லாத நேர்முழு எண்கள் கணம்

படம் 27

$1 \xrightarrow{s} 3, \qquad 2 \xrightarrow{s} 4$ முதலியன.

(2) $s_n = 4$, ஒவ்வொரு இயற்கை எண் n-க்கும்

$\therefore\ \{s_n\} = \{4, 4, 4, \ldots\}$

இதனை "மாறிலி ஒழுங்கு வரிசை" (constant sequence) என்றும் சொல்லுவோம்.

(3) $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

$\therefore \{s_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \ldots\}$

(4) ஒரு மெய்யெண்ணின் அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புகளும் (successive approximation) ஒழுங்கு வரிசையை அமைக்கின்றன. உதாரணமாக, $\sqrt{(3)}$-ன் மதிப்பை எண் கணித முறையில் கணக்கிடும்போது, முதல் தோராயம் $x_1 = 1$; அடுத்த தோராயம் $x_2 = 1 \cdot 7$; மூன்றாவது தோராயம் $x_3 = 1 \cdot 73$; நான்காவது $x_4 = 1 \cdot 732$; அதற்கடுத்தது $x_5 = 1 \cdot 7321$ முதலியன. 1, 1·7, 1·73, 1·732, . . . என்பவை ஒரு ஒழுங்கு வரிசையை அமைப்பன. இவற்றில் எதுவும் $\sqrt{(3)}$-க்குச் சமமில்லை. இவை, போகப் போக, $\sqrt{(3)}$-ஐ நெருங்குகின்றன.

3·2. ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கல் (Convergence of a Sequence)

$\{a_n\}$ என்பது ஒழுங்கு வரிசையென்றும், a என்பது ஒரு மெய்யெண் என்றும், ϵ என்பது யாதாமொரு நேர் மெய்யெண் என்றும் கொள்க. $|a_n - a| < \epsilon$, $n \geq N$ என்றவாறு ஒவ்வொரு ϵ-ஐப் பொறுத்து ஒரு நேர்முழு எண் N ஆனது இருந்தால் $\{a_n\}$ ஆனது மெய்யெண் a-க்கு ஒருங்குகிறது என்போம். ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$ ஆனது a-க்கு ஒருங்கினால் a-க்கு $\{a_n\}$-ன் "எல்லை" என்று பெயர்

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$ என்றும் எழுதுவதுண்டு.

இதை படிக்கும் விதம்: n ஆனது கந்தழியை நெருங்க, a_n-ன் எல்லை மதிப்பு a ஆகும்.

ஒவ்வொரு நேர்மெய்யெண் ϵ-க்கும் ஒரு நேர் முழு எண் N ஆனது, "$n \geq N \rightarrow |a_n - a| < \epsilon$" என்றவாறு இருந்தால் ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$ ஆனது மெய்யெண் a-க்கு ஒருங்குகிறது என்போம்.

"$\{a_n\}$ ஆனது a-க்கு ஒருங்குகிறது என்பதை $\{a_n\} \rightarrow a$ என்று குறியிடுவோம்; இதனை ஒருங்கும் ஒழுங்கு வரிசை என்றும் சொல்லுவோம்.

விளக்கக் குறிப்புகள்

(1) $\{a_n\} \rightarrow a$, $\epsilon > 0$ என்றால், $N \geq 1$ என்ற நேர் முழுவெண் ஆனது, "$n \geq N \rightarrow |a_n - a| < \epsilon$" என்றவாறு

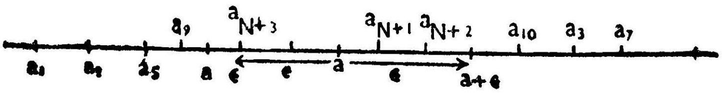
இருக்கிறது. முழு எண் N ஆனது ϵ-ஐப் பொறுத்திருக்கிறது. அதாவது வேறு புதிய $\epsilon' > 0$ கொடுக்கப்பட்டால் $N' \geqq 1$ என்ற முழு எண் "$n \geqq N' \rightarrow |a_n - a| < \epsilon'$" என்றவாறு இருக்கிறது. N' ஆனது N-ஐ விடப் பெரியதாக இருக்கலாம்; சிறியதாகவும் இருக்கலாம். N ஆனது ϵ-ஐப் பொறுத்திருக்கிறது என்பதை $N\epsilon$ அல்லது $N(\epsilon)$ என்ற குறியிட்டும் விளக்குவதுண்டு.

(2) $\{a_n\} \rightarrow a$, $\epsilon > 0$ என்றும், $n \geqq N \rightarrow |a_n - a| < \epsilon$ என்றவாறு நேர் முழு எண் N இருக்கிறது என்றும் கொண்டால் யாதாமொரு நேர் முழுவெண் $M \geqq N$ ஆனது "$n \geqq M \rightarrow |a_n - a| < \epsilon$" என்ற பண்பை உடைத்தாயிருக்கிறது. $\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட ஒரு $\epsilon > 0$-க்கு நேர்முழு எண் N ஆனது ஒரே முறை அல்ல.

(3) ஒழுங்கு வரிசையின் எல்லேக்கு விளக்கப்படம் ஒன்று வரையலாம். ஒழுங்கு வரிசையின் உறுப்புகள் மெய் எண்களானதால் அவற்றை மெய் நேர்கோட்டின் மீது குறிக்கலாம்.

முதலில் a-ஐக் குறித்துக் கொள்.

அத்தியாயம் 2-ல் 2·2-ல் கண்டபடி, $|a_n - a|$ என்ருல் $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$.



படம் 28

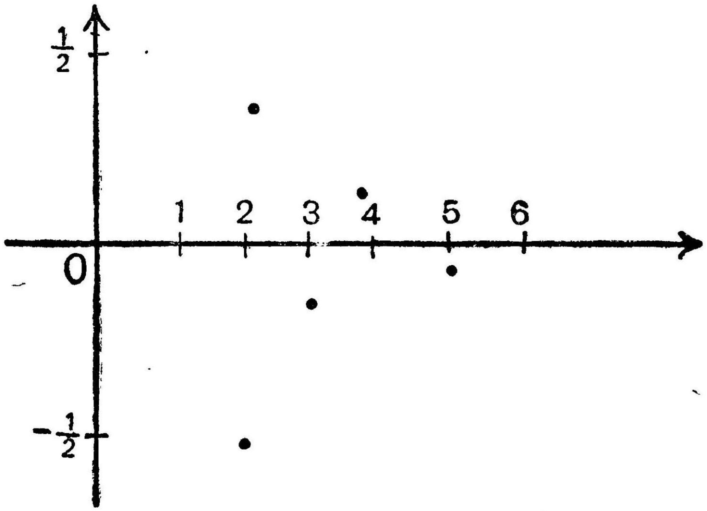
a-ன் வலது புறத்தில் a-யிலிருந்து ϵ தூரத்தில் $a + \epsilon$ என்ற எண்ணேயும் அஃதேபோல் a-ன் இடது புறத்தில் $a - \epsilon$ என்ற எண்ணேயும் குறிக்க இப்போது $a_1, a_2, a_3 \ldots a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ என்ற எண்களேக் குறிக்க, $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ என்பவை $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ இடைவெளியில் இருக்கின்றன. இந்தப் புள்ளிகள் a-க்கு வலது புறத்திலோ, இடது புறத்திலோ இருக்கலாம். a-ன் இருபுறங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் யாதாமொரு சிறிய இடைவெளியைத் தேர்ந்தெடுத்தோமானுல், $n \geqq N$-க்கு a_n எப்போதுமே a-ன் வலதோ, இடதோ அல்லது இருபுறங்களிலோ இருந்தால், a_n-ன் எல்லே a ஆகும்.

இப்போது "$n \geq N$" என்பதன் பொருள் விளங்கியதா? அதாவது சில "பொறுமை எல்லைகள்" (limits of tolerance) $\pm\epsilon$ அனுமதித்தோமானால், அஃதாவது, a-க்கு இருபுறத்திலும் ϵ தூரத்திற்குள், $a_1, a_2, \ldots, a_N$ என்பவற்றைத் தவிர, மீதி எல்லா a_n-ம் இருக்கின்றன. $a_1, a_2, \ldots, a_N$ என்பவை எல்லையின் வரையறைக்கு ஒவ்வாத சில எண்கள் முடிவுள்ளவையாக இருக்க வேண்டும். $(a-\epsilon, a+\epsilon)$-க்குள் a_N இருக்கலாம். சுருக்கமாக முடிவுள்ள உறுப்புகளைத் தவிர மீதி எல்லாம் $(a-\epsilon, a+\epsilon)$-க்குள் இருக்க வேண்டும். எத்தனை உறுப்புகள் தவிர்க்கப்படுகின்றன என்பது ϵ-ஐப் பொறுத்தது.

3·3. ஒழுங்கு வரிசையும் விளக்கப்படமும்

கீழ்க்கண்ட விளக்கப்படம் மூலமாகவும் எல்லையைப் புரிந்து கொள்ளலாம். ஒழுங்கு வரிசை என்பது நேர் முழு எண்களை வரையறை அரங்கமாகவும், ஒழுங்கு வரிசையின் உறுப்புகள் வீச்செல்லைக் கணமாகவும் உடைய சார்பு அல்லது கோத்தல் அல்லவா? இக்கருத்தைப் பயன்படுத்தி ஒழுங்கு வரிசையின் வரைபடம் வரையலாம். நேர் முழுவெண்களை x-அச்சிலும், சார்பலன்களை y-அச்சிலும் குறிக்க.

உதாரணமாக, $\{(-\frac{1}{2})^n\}$ என்ற ஒழுங்கு வரிசையை வரைபடமாக்குவோம்.

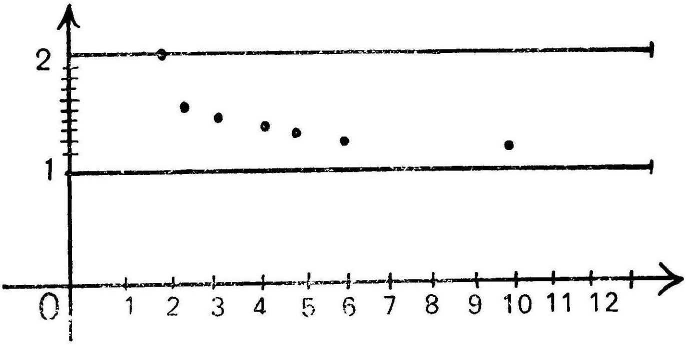


படம் 29

$s_n = (-\frac{1}{2})^n$ என்ருல்

$s_1 = -\frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{4}, \quad s_3 = \frac{1}{8}, \quad s_4 = \frac{1}{16}, \quad s_5 = -\frac{1}{32}$

மற்ருெரு உதாரணத்தை, $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.



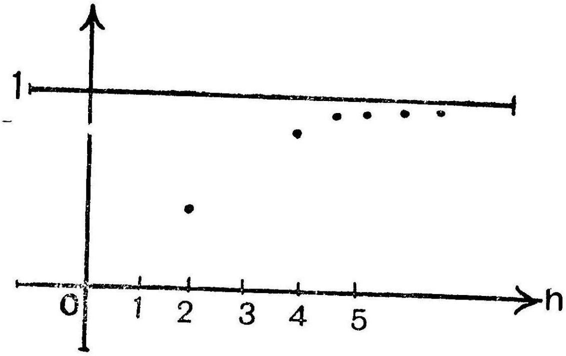
படம் 30

$s_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 1\cdot\frac{1}{2}, \quad s_3 = 1\frac{1}{3},$

$s_4 = 1\frac{1}{4}, \quad s_5 = 1\frac{1}{5} \ldots$

இப்போது $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$-ஐ வரைபடமாக்குவோம்.

$s_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{1}{2}, \quad s_3 = \frac{2}{3}, \quad s_4 = \frac{3}{4}, \ldots$



படம் 31

படம் 29-ல், n-ன் மதிப்புகளைப் பெரியதாக்க, பெரியதாக்க ஒழுங்கு வரிசை $\{(-\frac{1}{2})^n\}$ 0-ஐ நெருங்குகிறது.

படம் 30-ல், $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ ஆனது 1-யும், படம் 31-ல்

$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ ஆனது 1-யும் நெருங்குவதைக் காணலாம்.

3·4. எல்லையைக் காணல்

வரை இலக்கணப்படி எல்லையைக் காண, முதலில் எல்லை இதுவாக இருக்கலாம் என்று ஊகித்து வரை இலக்கணப்படி சரிபார்க்க வேண்டும்.

உதாரணம் 1

$$\{a_n\} = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}\text{-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.}$$

$a=1$ என்று ஊகித்தால்,

$$|a_n - a| = \frac{1}{n}$$

$\epsilon = \cdot 001$ என்று உதாரணத்திற்கு எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad |a_n - a| < \epsilon \rightarrow \frac{1}{n} < \cdot 001$$

$$\rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$$

$$\rightarrow n > 1000$$

$\therefore$ $a_1 \ldots a_{1000}$ என்ற எண்கள் எல்லாவற்றையும் தவிர a_{1001} முதலாக உள்ள மற்றெல்லா எண்களும், $(1+\cdot 001, 1-\cdot 001)$ என்ற இடைவெளியில் இருக்கின்றன.

$$\therefore \quad |a_n - 1| < \cdot 001, \; n > 1000$$

$$\therefore \quad \{a_n\} \rightarrow 1. \quad \epsilon = \cdot 001 \quad \rightarrow N_\epsilon = 1000$$

ஒவ்வொரு ϵ-க்கும் ஒரு N_ϵ-ஐக் கண்டுபிடிக்க முடியும் எனக் காண்பிக்க வேண்டும்.

உதாரணமாக, $\epsilon = .000999$ எனக.

$$|a_n - 1| < \cdot 000999 \rightarrow \frac{1}{n} < \cdot 000999$$

$$\rightarrow \frac{1}{n} < \frac{999}{1000000}$$

$$\rightarrow n > 1001$$

$$\therefore N\epsilon = 1001.$$

$N\epsilon$-ஐ $\frac{1}{\epsilon}$-ஐ விடப் பெரிய முதல் முழு எண்ணாக எடுத்துக் கொண்டால் $n > N\epsilon \rightarrow a_n$ ஆனது $1-h$-க்கும் $1+h$-க்கும் இடையில் இருக்கும்.

உதாரணம் 2

விகிதமுறு எண் $\frac{7}{9}$-ஐப் பதின்பகுப்பு முறைபடுத்தினால் கிடைப்பது ·7777 . . . என்ற முடிவில்லாத திரும்பும் தசமம். (திரும்பும் இந்த பதின்பகுப்பை ·7 என்று 7-ன் மீது ஒரு புள்ளி வைத்துக் காண்பிப்பது வழக்கம்.)

பதின்பகுப்பு முறையின் அடுத்தடுத்த தோராயங்கள் ஒழுங்கு வரிசையை அமைக்கின்றன.

$a_1 = \cdot 7,\ a_2 = \cdot 77,\ a_3 = \cdot 777,\ \ldots,\ a_n = \cdot 777 \ldots 7$ (n தசம இடங்கள்).

$$a_n = \cdot 7 + \cdot 77 + \ldots + \cdot 77 \ldots 7$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \ldots + \frac{7}{10^n}$$

$$= \frac{7}{10}\left\{1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right\}$$

$$= \tfrac{7}{10} \cdot 1 \frac{\{1 - (\frac{1}{10})^n\}}{(1 - \frac{1}{10})}$$

$$= \frac{\frac{7}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{(\frac{9}{10})} = \frac{7}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$$

$\{a_n\}$-ன் எல்லை $\frac{7}{9}$ என்று ஊகிப்போம்.

$$a - a_n = \tfrac{7}{9} - \tfrac{7}{9}\left[1 - \frac{1}{10^n}\right]$$

$$= \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{10^n}$$

இப்போது யாதாமொரு நேர் எண் ϵ-ஐத் தேர்ந்தெடுப்போம். இந்த ϵ இப்போது நிலையெண்.

$$\left| a_n - \frac{7}{9} \right| = \left| \frac{7}{9} - a_n \right| < \epsilon \rightarrow \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{10^n} < \epsilon$$

$$\rightarrow \frac{1}{10^n} < \frac{9}{7}\epsilon$$

$$\rightarrow 10^n > \frac{7}{9\epsilon}$$

நிலையான ϵ-க்கு, n வளர வளர (increases), 10^n-ம் வளர்கிறது.

$n=k$ என்பதற்கு $10^k = \dfrac{7}{9\epsilon}$ என்க.

$$\therefore \ k = \text{Log}_{10}\left(\frac{7}{9\epsilon}\right)$$

$n_0 = k$-ஐவிடப் பெரிய முதல் நேர் முழுவெண் என்க.

$$\therefore \ n_0 > k$$

$$\therefore \ 10^{n_0} > 10^k = \frac{7}{9\epsilon}$$

$$\therefore \ N > n_0 \text{ என்றால் } 10^N > 10^{n_0} < \frac{7}{9\epsilon}$$

$\therefore$ N இருக்கிறது.

$$\therefore \ \left| a_n - \frac{7}{9} \right| < \epsilon, \quad N > n_0$$

இப்போது $\epsilon = 10^{-10}$ என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \ 10^{n_0} > \frac{7}{9} \cdot 10^{-10}$$

அதாவது $10^{n_0} > \frac{7}{9} \cdot 10^{10}$ $\therefore$ $n_0 = 10$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$\therefore$ $n > 10$-க்கு $\{a_n\}$ ஒருங்குகிறது.

$\epsilon = 10^{-30}$ என்றால், $10^{n_0} > \frac{7}{9.10^{-30}}$

அதாவது, $10^{n_0} < \frac{7}{9} \cdot 10^{30}$ $\therefore$ $n_0 = 30$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம். $\therefore$ $n > 30$ க்கு $\{a_n\}$ ஒருங்குகிறது.

$10^{10} > \frac{7}{9}\, 10^{10}$, ஆனால் $10^{10} \ngtr \frac{7}{9}\, 10^{20}$, $\epsilon = 10^{-10}$

$10^{10} > \frac{7}{9}\, 10^{10}$, $10^{20} > \frac{7}{9}\, 10^{20}$, $\epsilon = 10^{-20} < 10^{-10}$

பொதுவாக, ϵ-ஐ மிகச் சிறியதாகத் தேர்ந்தெடுப்பதன் நோக்கம் பெரிய n_0-ஐக் கிடைக்கப் பெற வேண்டும் என்பதே.

$$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{7}{9}$$

உதாரணம் 3

$$-1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$$

என்ற ஒழுங்கு வரிசையின் எல்லையை 0 என்று ஊகிப்போம்.

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $a = 0$

$$|a_n - a| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n} < \epsilon$ என்றால்தான் $|a_n - a| < \epsilon$

அதாவது $n > \frac{1}{\epsilon}$ என்றிருக்க வேண்டும்.

$n = n_0$ என்பது $\frac{1}{\epsilon}$-ஐவிடப் பெரிய முதல் நேர் முழு எண் என்க.

$\therefore\ n > n_0$ என்றவாறு எல்லா n-க்கும்,

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

உதாரணம் 4

ஒவ்வொரு நேர்முழு எண் n-க்கும் $\{a_n\} \equiv \{3\}$ என்க.

அதாவது, 3, 3, 3, . . .

$\lim_{n \to \infty} a_n = 3$ என்று காண்பிக்கலாம்.

ϵ என்ற யாதானும் சிறிய நேர்மெய்யெண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்க $n \geqq N \rightarrow |a_n - 3| < \epsilon$ என்றவாறு N என்ற எண்ணைக் காணவேண்டும்.

$|a_n - 3| = |3 - 3| = 0$, எல்லா n-க்கும்

$\therefore$ N-ஐ எப்படி வேண்டுமானாலும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$N = 1$ என்றோ, 7 என்றோ, 95 என்றோ அல்லது எது வேண்டுமானாலும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$\therefore$ முடிவில், $|a_n - 3| < \epsilon$.

உதாரணம் 5

$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ என்க.

$\{a_n\} \rightarrow 0$ என்று நிறுவலாம்.

யாதாமொரு மிகச் சிறிய $\epsilon > 0$-ஐத் தேர்ந்தெடு.

$n \geqq N \rightarrow |a_n - 0| < \epsilon$ என்றவாறு ஒரு நேர்முழு எண் N-ஐத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். ஆர்கிமிடீயன் விதிப்படி, $N\epsilon > 1$ என்றவாறு ஒரு நேர்முழு எண் N இருக்கிறது.

$$\text{அதாவது } \frac{1}{N} < \epsilon$$

$$n \geqq N \rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$$

$$\rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \because \frac{1}{N} < \epsilon$$

$$\therefore n \geqq N \rightarrow (a_n - 0) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\therefore \{a_n\} \rightarrow 0$$

கிளைத் தேற்றம்

a, b என்பவை இரு மெய்யெண்கள் என்க. ஒவ்வொரு நேர் மெய்யெண் ϵ-க்கும், $|a - b| < \epsilon$ என்றால், $a = b$.

நிறுவல்

$a \neq b$ என்று வைத்துக்கொள்.

$\therefore \quad |a - b| > 0 \qquad |a - b| = \epsilon'$ என்க.

$\therefore \quad |a - b| \nless \epsilon$ என்றவாறு ஒரு ϵ'-ஐக் கிடைக்கப் பெற்றோம்.

$\therefore \quad a = b$

தேற்றம் 1

ஒருங்கும் ஒழுங்கு வரிசைக்கு ஒரே ஒரு எல்லைதான் உண்டு அல்லது, $\{a_n\}$ என்பது ஒரு ஒழுங்கு வரிசை என்றால் $\{a_n\} \rightarrow a$, $\{a_n\} \rightarrow b \rightarrow a = b$.

நிறுவல்

ஒவ்வொரு நேர் மெய்யெண் ϵ-க்கும் $|a - b| < \epsilon$ என்று காண்பிக்கலாம்.

$$\because \{a_n\} \rightarrow a, \{a_n\} \rightarrow b,$$

$$\therefore \text{“} n \geq N_1 \rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{”}$$

என்றவாறும், “$n \geq N_2 \rightarrow |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$” என்றவாறும் N_1, N_2 என்ற நேர் முழு எண்கள் இருக்கின்றன.

$n_0 \geqq N_1$, $n_0 \geqq N_2$ என்றவாறு அதாவது $n_0 = n-a_x(N_1, N_2)$ n_0 என்ற நேர் முழு எண் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad |a_{n_0}-a| < \frac{\epsilon}{2}, \; |a_{n_0}-b| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\therefore \quad |a-b| = |a-a_{n_0}+a_{n_0}-b| \leqq |a_{n_0}-a| + |a_{n_0}-b- < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\therefore$ கிளைத் தேற்றத்தின்படி $a=b$.

3·5. விரி ஒழுங்கு வரிசையும் (Divergent sequence) அலை ஒழுங்கு வரிசையும் (Oscillatory sequence)

ஒழுங்குவரிசை $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்க வில்லையென்ருல் பல செயல்கூடு நிகழ்ச்சிகள் எழலாம்.

(i) நம் விருப்பப்படி எத்தனை பெரியதாக வேண்டுமோ அத்தனை பெரிய நேர் எண் K-ஐ எடுத்துக் கொள்க. "$n \geqq N \rightarrow a_n > K$" என்றவாறு N இருந்தால் N ஆனது K-ஐப் பொறுத்திருப்பதால் N_k என்றும் எழுதலாம். இத்தகைய பண்புடைய $\{a_n\}$ ஆனது $+\infty$-க்கு விரிகிறது என்போம். இத்தகைய ஒழுங்கு வரிசையை விரி ஒழுங்கு வரிசை என்றும் சொல்லுவதுண்டு.

$$\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = +\infty$$ என்றும் குறியிடுவதுண்டு.

(ii) நம் விருப்பத்திற்கிணங்க மிக மிகப் பெரிய நேர் எண் L என்ருல் குறையெண் $-L$-க்கு ஒத்த,

$$\text{"}n \geqq N \rightarrow a_n < -L\text{"}$$

என்றவாறு உள்ள நேர் முழு எண் N இருந்தால், $\{a_n\}$ ஆனது $-\infty$-க்கு விரிகிறது என்போம். $\{a_n\}$-ஐ விரி ஒழுங்கு வரிசை என்போம்.

$$\lim_{n\rightarrow 8} a_n = -\infty$$ என்றும் எழுதுவதுண்டு.

(iii) ஒருங்காமலும், விரியாமலும் உள்ள ஒழுங்கு வரிசையை அலையும் ஒழுங்கு வரிசை என்போம். ஒரு அலையும் ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$-ல் எல்லா n-க்கும் $|a_n| < a$ என்ற

வாறு a என்ற நேர் எண் இருந்தால், $\{a_n\}$ ஆனது முடிவுள்ளதாக அலைகிறது (oscillating finitely) என்போம். அம்மாதிரி a இல்லையெனில் $\{a_n\}$ ஆனது முடிவில்லாமல் அலைகிறது என்போம்.

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) $\{a_n\}=\{n\}$ என்ற ஒழுங்குவரிசையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\{n\}=1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

உறுப்புகளின் மதிப்புகள் அதிகமாகிக்கொண்டே அல்லவா போகின்றன?

$\{n\}$-ல் நம் மனதிற்குப்பட்ட மிகப்பெரிய நேர் முழு எண் K என்க.

K என்பது $\{a_n\}$-ல் K-வது எண். தெளிவாக, K-க்கு மேல் $\{n\}$-ன் எல்லா உறுப்புகளின் மதிப்புகள் அதிகமாக இருக்கின்றன.

$\therefore$ $\{n\}$ ஆனது $+\infty$-க்கு விரிகின்றது.

(2) $\{a_n\}=\{-n^2\}=-1, -4, -9, -16, \ldots$

நம் மனதிற்குப்பட்ட மிகப்பெரிய நேர் எண் L என்றால், குறையெண் $-L$-ஐவிட $\{a_n\}$-ல் சிறிய எண்கள், $\{a_n\}$-ல் $-L$-க்கு அடுத்தடுத்து எழுதப்படும் எண்களே.

உதாரணமாக, $L=K^2$ என்றால்

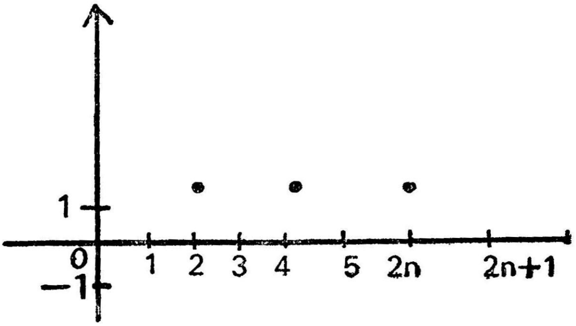
$-(K+1)^2<-K^2$; $-(K+2)^2<-K^2$, $-(K+n)^2<-K^2$ முதலியன.

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது $-\infty$-க்கு விரிகின்றது.

(3) $\{a_n\}=\{(-1)^n\}=-1, 1, -1, 1, \ldots$

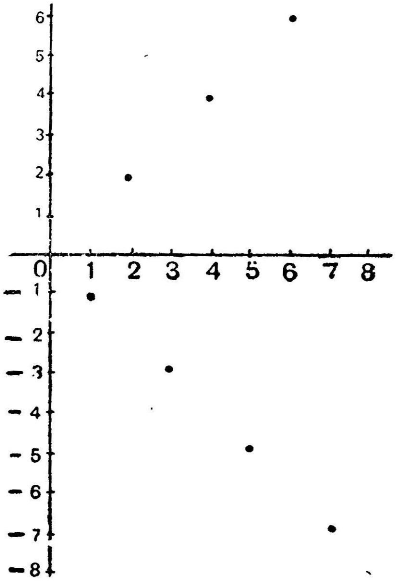
$$|a_n|<1, \text{ எல்லா } n\text{-க்கும்}$$

$\{a_n\}$ என்பது முடிவுள்ள அலையும் ஒழுங்கு வரிசை.



படம் 32

(4) $\{a_n\} = \{(-1)^n . n\} = -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \ldots$



படம் 33

$\{a_n\}$ ஆனது முடிவில்லாமல் அலையும் ஒழுங்கு வரிசை.

3·6. ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசைகளும் (Monotonic Sequences) வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசைகளும் (Bounded Sequences)

வரை இலக்கணம்

ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$ ஆனது $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \ldots \leqq a_n, \ldots$ என்றவாறு இருந்தால், $\{a_n\}$-ஐ ஓரேமுறை ஏறும் (monotonic increasing) ஒழுங்குவரிசை என்போம் (அதாவது $a_n \leqq a_{n+1}\ \forall n$).

(உ-ம்) $\{n\}$

வரை இலக்கணம்

ஒழுங்குவரிசை $\{a_n\}$ ஆனது $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \ldots \geqq a_n$, என்றவாறு இருந்தால் $\{a_n\}$-ஐ ஓரேமுறை இறங்கும் (monotonic decreasing) ஒழுங்கு வரிசை என்போம் (அதாவது $a_n \geqq a_{n+1}\ \forall n$).

(உ-ம்) $\left\{\frac{1}{n} - 1\right\}$

வரை இலக்கணம்

பொதுவாக, ஒரு ஒழுங்கு வரிசை ஏறும் அல்லது இறங்கும் தன்மையதாக இருந்தால் அதனை "ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசை" என்போம்.

வரை இலக்கணம்

ஒவ்வொரு n-க்கும், $a_n \leqq M$, என்றவாறு ஒரு எண் M இருந்தால், $\{a_n\}$-ஐ மேல் வரம்புள்ளது (bounded above) என்றும்,

ஒவ்வொரு n-க்கும், $a_n \leqq m$ என்றவாறு ஒரு எண் m இருந்தால் $\{a_n\}$-ஐக் கீழ் வரம்புள்ளது (bounded below) என்றும் வரையறுப்போம்.

(உ-ம்) $\{n\} = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

என்பது கீழ் வரம்புள்ளது.

$\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ ஆனது வரம்புள்ளது. ஏனெனில்

$\left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}, \ldots$ என்பதில்

ஒவ்வொரு n-க்கும், $1 - \frac{1}{n} \leqq 1$.

தேற்றம் 1

ஒவ்வொரு ஒருங்கும் ஒழுங்கு வரிசையும் வரம்புள்ளதாகும்.

நிறுவல்

$\{a_n\} \to a$ என்க.

$\therefore$ $n \geqq N \to |a_n - a| < \varepsilon$ என்றவாறு ஒரு N இருக்கிறது.

$\therefore$ எல்லா $n \geqq N$க்கும் $|a_n| < |a| + \varepsilon$

$k = max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + \varepsilon\}$ என்றால், $|a_n| \leqq k$, எல்லா n-க்கும்,

$\therefore$ வரை இலக்கணப்படி, $\{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ளதாகும்.

முக்கியமான குறிப்பு

இத் தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையாகாது. அதாவது, பொதுவாக வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசைகள் ஒருங்குவதில்லை.

இதனை நிறுவ, எதிர் உதாரணம் ஒன்று கொடுத்தால் போதும். உதாரணமாக, 1, 2, 1, 2, . . . என்ற ஒழுங்கு வரிசை வரம்புள்ளது. ஏனெனில் எல்லா n-க்கும் $a_n \leqq 2$. ஆனால் இந்த ஒழுங்கு வரிசை அலையும் ஒழுங்கு வரிசையாயிற்றே, ஒருங்கவில்லையே.

மற்றொரு உதாரணம் $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$

$|a_n| < 2 \,\forall n$, $\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ளது.

$\{a_n\} \to l$ என்றால், $n \geqq N \to |(-1)^n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geqq N_\varepsilon$ என்றவாறு N உள்ளது. nஆனது ஒற்றை எண்ணானால்,

$a_n = -1$ $\therefore$ $|(-1) - l| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, $\therefore$ $l = -1$.

ஆனால், a_n ஆனது இரட்டை எண் என்றால் $a_n = 1$

$\therefore$ $|1 - l| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, $\therefore$ $l = 1$

ஒருங்கும் ஒழுங்கு வரிசைக்கு ஒரே ஒரு எல்லைதானே உண்டு. (பார்க்க : 3·4 தேற்றம்)

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்கவில்லை.

தேற்றம் 2

ஒரு வரம்புள்ள ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசை ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

$\{a_n\}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒழுங்கு வரிசை என்க.

பாகம் 1

$\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என்க. $\{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ளது என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் $\{a_n\}$-க்கு மேல் வரம்பு உண்டு. $\therefore$ மெய்யெண்களின் முழுமைப் பண்புப்படி, $\{a_n\}$-க்கு l.u.b. உண்டு; இதனை a என்க. இப்போது $\{a_n\}\rightarrow a$ என்று நிறுவலாம்.

$\varepsilon>0$-ஐத் தேர்ந்தெடு.

$a-a_N<\varepsilon$ என்றவாறு நேர்முழுவெண் N உள்ளது; அப்படி இல்லையெனில், எல்லா n-க்கும்

$a-\varepsilon\geq a_n$ என்றும், $\therefore$ $a-\varepsilon$ ஆனது $\{a_n\}$-ன் ஒரு மேல்வரம்பு என்றும் ஆகிவிடும்; இது அர்த்தமற்றது. ஏனெனில் l.u.b-ஐக் காட்டிலும் சிறிய மேல்வரம்பு கிடைத்திருப்பது தவறல்லவா ?

$$n\geq N\rightarrow a_n\geq a_N,\quad |a-a_n|<\varepsilon$$

$\therefore$ $\{a_n\}\rightarrow a$. $\therefore$ ஒரேமுறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை அதன் l.u.b.-க்கு ஒருங்குகிறது.

இதே போல் ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசையானது அதன் g.l.b-க்கு ஒருங்குகிறது என நிறுவலாம். இஃது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டது.

$\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை என்றால், $-a_1, -a_2, \ldots -a_{n_1} \ldots$ என்பது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை ஆகும். $-a_n=b_n$ என்றால், $\{b_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை ஆகும்.

ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை ஒருங்குகிறது என்பதால் பாகம் 1-ன்படி $\{b_n\}\rightarrow\{b_n\}$-ன் l.u.b.$=b$ என்க.

$$\therefore\quad |b_n-b|<\varepsilon,\ N\geq n_0$$

(அதாவது) $b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon$.

b என்பது $\{b_n\}$-ன் l.u.b. என்றால், $b=-a$ என்றால்,

$$-a-\varepsilon<-a_n<-a+\varepsilon$$

$$a+\varepsilon>a_n>a-\varepsilon$$

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$$

$$\therefore \quad a_n\rightarrow a$$

$b_n<b$ அதாவது $-a_n<-a$

(அதாவது) $a_n>a$. $\therefore$ a என்பது $\{a_n\}$-ன் g.l.b.

3·7. வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசையின் மேல், கீழ் எல்லைகள் (Upper and Lower Limits of a Bounded Sequence)

வரை இலக்கணம்—மேல் எல்லை

வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$-ன் மேல் வரம்பெண் M என்றும், கீழ்வரம்பெண் m என்றும் கொள்க.

$a_2, a_3, a_4, \ldots$-ன் மேல் வரம்பெண் M_2 என்றும் கீழ் வரம்பெண் m_2 என்றும் கொள்க. $a_3, a_4, \ldots$-ன் மேல் வரம்பெண் M_3 என்றும் கீழ் வரம்பெண் m_3 என்றும் கொள்க. இப்படியே $M_1, M_2, M_3, \ldots$ என்ற மேல் வரம்பெண்களும் $m_1, m_2, m_3, \ldots$ என்ற கீழ் வரம்பெண்களும் உள்ளன.

$$M_1\geq M_2\geq M_3\geq \ldots \geq m_1.$$

$\therefore$ M-கள் ஒரே முறை இறங்கும் வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசையை அமைக்கின்றன.

$\therefore$ 3·6 தேற்றம் 2-ன்படி, $\{M_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\{M_n\}\rightarrow \Lambda$ என்க.

Λ-க்கு $\{a_n\}$-ன் "மேல் எல்லை" (upper limit) என்று பெயர்.

இது போல் $\{a_n\}$-ன் கீழ் வரம்பெண்கள் $m_1, m_2, m_3 \ldots$ என்றால் $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} m_n$ இருக்கிறது.

$\lim\limits_{n\to\infty} m_n=\lambda$ என்றால் λ-க்கு $\{a_n\}$-ன் "கீழ் எல்லை" என்று பெயர்.

தேற்றம் 1

Λ-ன் பண்பு

Λ என்பது வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$-ன் மேல் எல்லை என்க.

ϵ என்பது யாதாமொரு கொடுக்கப்பட்ட நேர் மெய்யெண் என்றால்

(i) $a_n > \Lambda+\epsilon$, எல்லா நேர் முழு எண்கள் $> N_\epsilon$

(ii) $a_n > \Lambda-\epsilon$, முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள எல்லா நேர் முழு எண்களுக்கும்.

நிறுவல்

$\{M_n\}\to\Lambda$ என்பதால்,

$n\geqq N\to |M_n-\Lambda|<\epsilon$ என்றவாறு ϵ-ஐப் பொறுத்து N என்ற நேர் முழுஎண் இருக்கிறது.

$\therefore n\geqq N\to \Lambda-\epsilon<M_n<\Lambda+\epsilon$

மேல் எல்லையின் வரை இலக்கணத்தில் உள்ளபடி,

(I) a_N, a_{N+1}, a_{N+2} . . . என்ற எண்களின் மேல் வரம்பெண் M_n.

(II) $\therefore\ n\geqq N\to a_n\geqq M_N$

$\therefore$ (I), (II)-லிருந்து, $n\geqq N_\epsilon\to a_n<\Lambda+\epsilon$

$\therefore$ (i) நிறுவப்பட்டது.

மேல் வரம்பெண்ணின் பண்புப்படி, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, . . . என்ற எண்களில் குறைந்த பட்சம் ஒரு உறுப்பாவது, $M_N-\epsilon$-ஐ விடப் பெரியதாக இருக்கும். இவ்வெண் a_{n_0} என்க.

$\therefore\ a_{n_0}>M_N-\epsilon$

$\quad < \Lambda-\epsilon$ (I-லிருந்து)

$\therefore$ n_0-ஐவிடப் பெரிய நேர் முழுஎண் N' என்க.

$\therefore$ $M_{N'} \leqq M_{n_0}$

Λ ஆனது $\{a_n\}$-ன் மேல் எல்லை என்பதால்

$$\Lambda \leqq M_{N'}$$

முன்போல், $a_{N'}$, $a_{N'+1}$, $a_{N'+2}$, . . . என்ற எண்களில் குறைந்த பட்சம் ஒரு எண்ணாவது $\Lambda-\epsilon$-ஐவிடப் பெரியதாய் இருக்க வேண்டும். இவ்வெண்ணை a_{n_0}' என்க.

$\therefore$ a_{n_0} , a_{n_0}' , a_{n_0}'' , . . . என்ற முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள எண்கள் எல்லாம் $\Lambda-\epsilon$-ஐவிடப் பெரியன.

$\therefore$ (ii) நிறுவப்பட்டது.

தேற்றம் 2

வரம்புள்ள ஒழுங்குவரிசை $\{a_n\}$-ன் கீழ் எல்லை λ-ன் பண்பு

யாதாமொரு நேர்மெய்யெண் ϵ கொடுக்கப்பட்டால்,

(i) $a_n > \lambda - \epsilon$, எல்லா $n > N_\epsilon$

(ii) $a_n < \lambda + \epsilon$, முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள n-க்கு.

நிறுவல்

தேற்றம் 1-ஐ நிறுவியது போலவேதான். இஃது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டது.

குறியீட்டு முறை

வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$-ன் மேல் எல்லையை

$\Lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n$ என்றும்,

கீழ் எல்லையை $\lambda = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n$ என்றும் குறியிடுவர்.

குறிப்பு: $\Lambda \geqq \lambda$

தேற்றம் 3

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ என்பவை நேர் உறுப்புகளையுடைய இரு ஒழுங்கு வரிசைகள் என்றும்,

$\{a_n\}$-ஐ மேல்வரம்புள்ளது என்றும் $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ என்றும் கொண்டால், $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

$\{a_n\}$ என்பது மேல் வரம்புள்ளது; நேர் எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்டது.

$\therefore$ எல்லா n-க்கும், $a_n \leqq G,\quad G>0,$

$\{b_n\}$ என்பதும் நேர் எண்களைக் கொண்டிருப்பதால், எல்லா n-க்கும் $a_n b_n \leqq G b_n$

$$< G(1+\epsilon)$$

$\therefore$ $(a_n b_n)$ ஆனது மேல் வரம்புள்ளது.

நாம் நிறுவ வேண்டியது

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n = \mu' > \mu = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ என்க.

$\mu' - \mu = 2\epsilon$ என்றும், $a_1, a_2, a_3, \cdots$ என்ற எண்களின் மேல்வரம் பெண் G என்றும் கொள்க.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ என்பதால், $n_1 \geqq N_1 \to |b_n - 1| < \frac{\epsilon}{2G}$ என்றவாறு ஒரு நேர் முழு எண் N_1 இருக்கிறது.

$$\therefore n \geqq N_1 \to |a_n b_n - a_n| = |a_n(b_n - 1)| = |a_n|\ |b_n - 1|$$

$$< G.\frac{\epsilon}{2G} = \frac{\epsilon}{2}$$

(I) $\therefore\ a_n b_n < a_n + \frac{\epsilon}{2},\ n \geqq N_1$

ஆனால், $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \mu$ என்பதால்

$n \geq N_2 \rightarrow a_n < \mu + \frac{1}{2}\epsilon$ என்றவாறு N_2 என்ற ஒரு நேர் முழு வெண் இருக்கிறது (இப்பகுதியில் தேற்றம் 1-ன்படி).

(II) (I) ஆனது $n \geq N \rightarrow a_n b_n < \mu + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \mu + \epsilon$,

$N = max\ (N_1, N_2)$ என்ருகிறது.

தற்கோள்படி, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} (a_n\, b_n) = \mu'$ என்பதாக

$a_n\, b_n > \mu' - \epsilon$, முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள n-களுக்கு. ஆனல் தற்கோளின்படி, $2\varepsilon = \mu' - \mu$, அதாவது $\mu + \varepsilon = \mu' - \varepsilon$.

$\therefore\ a_n b_n > \mu' - \epsilon \rightarrow a_n b_n > \mu + \varepsilon$

இது (II)க்கு எதிர்மறுப்பு.

$\therefore\ \mu' \not> \mu$

இதுபோல் $\mu' \not< \mu$

$\therefore\ \mu' = \mu$ என்பதுதான் சரி. $\therefore\ \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n = 1 \rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n$

$= \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$

தேற்றம் 4

ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்கினல்,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} a_n = \underline{\lim_{n \to \infty}} a_n = \lim_{n \to \infty} a_n$$

நிறுவல்

3·6 தேற்றம் 1-ன்படி, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ என்ற ஒழுங்கு வரிசை ஒருங்குவதால் அது வரம்புள்ளது.

$\therefore\ \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$-ம், $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}$-ம் இருக்கின்றன.

$\lim a_n = l$, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n = \Lambda$, $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n = \Lambda$ என்று கொள்க.

நிறுவவேண்டியது $l = \Lambda = \lambda$

முடியுமானல், $\Lambda > l$ என்றும் $2\varepsilon = \Lambda - l$ என்றும் கொள்க.

l-ன்வரை இலக்கணப்படி,

(I) $n \geqq N \rightarrow a_n < l+\epsilon$ என்றவாறு N என்ற முழு எண் இருக்கிறது.

Λ-ன் பண்புப்படி,

$a_n > \Lambda - \varepsilon$, முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள nக்கு.

(II) (அதாவது) $> l+2\varepsilon-\varepsilon = l+\epsilon$ $\because 2\varepsilon = \Lambda - l$ (தற்கோள்)

(I)ம் (II)ம் ஒரே சமயத்தில் உண்மையாக இருக்கமுடியாது.

$$\Lambda \not> l$$

இதுபோல் $\lambda \not< l$ என்றும் காண்பிக்கலாம்.

ஆனால் $\Lambda \geqq \lambda$

$\therefore \Lambda \not> l,\ \lambda \not< l,\ \Lambda \geqq \lambda \rightarrow \Lambda = \lambda = l.$

தேற்றம் 5

(தேற்றம் 4-ன் மறுதலை)

வரம்புள்ள ஒழுங்குவரிசை $\{a_n\}$-ன் மேல், கீழ் எல்லைகள் சமமானால், $\{a_n\}$ ஆனது அவற்றின் பொது மதிப்புக்கு ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n = \Lambda$ என்பதால், $\epsilon > 0$க்கு

$$a_n < \Lambda + \epsilon, \quad n \geqq N_1$$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n = \lambda$ என்பதால் $\epsilon > 0$க்கு

$$a_n > \lambda - \epsilon, \quad n \geqq N_2$$

$\Lambda = \lambda$ எனக் கொடுத்திருப்பதால், $a_n > \Lambda - \epsilon,\ n \geqq N_2$

$\therefore\ \Lambda - \epsilon < a_n < \Lambda + \epsilon,\ n \geqq max\ [N_1, N_2]$-க்கு

$\therefore\ |a_n - \Lambda| < \epsilon,\ n \geqq max\ [N_1, N_2]$

$$\therefore\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n = \lim_{n\to\infty}\ a_n$$

3·8. "கோஷி"யின் "ஒருங்கல் பொது விதி" (Cauchy's General Principle of Convergence)

$\{a_n\}$ என்ற ஒழுங்கு வரிசைக்கு ஓர் எல்லை இருத்தலுக்கு வேண்டிய போதிய விதியாவது: கொடுக்கப்பட்ட நம் விருப்பத் திற்குட்பட்ட $\epsilon > 0$க்கு, "$n \geqq N \rightarrow | a_{n+p} - a_n | < \epsilon$," ($p$ என்பது எல்லா நேர் முழுஎண்களைக் குறிக்கும்) என்றவாறு N இருக்க வேண்டும்.

நிறுவல்—பாகம் 1

விதி வேண்டியது →

$\{a_n\} \rightarrow a$ என்க. $\epsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \ n \geqq N \rightarrow | a_n - a | < \frac{1}{2}\epsilon$ என்றவாறு N இருக்கிறது.

$\therefore \ | a_{n+p} - a | < \frac{1}{2}\epsilon, \ n \geqq N$

ஆனால் $a_{n+p} - a_n = a_{n+p} - a + a - a_u$

$\therefore | a_{n+p} - a_n | \leqq | a_{n+p} - a | + | a - a_n | = | a_{n+p} - a | \ | a_n - a |$

$$\leqq \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon, n \geqq N, \ \forall p$$

நிறுவல்—பாகம் 2

கொடுத்திருப்பவை (i) p யாதாமொரு நேர் முழு எண்

(ii) நம் விருப்பத்திற்கு இணங்கிய மிகமிகச் சிறிய $\epsilon > 0$

(iii) $| a_{n+p} - a_n | < \epsilon, \ n \geqq N,$
$p = 1, 2, 3 \cdots$

(iii)-ன் படி,

$| a_{N+1} - a_N | < \epsilon, | a_{N+2} - a_N | < \epsilon, \ldots$ என்பதால்,

$a_N - \epsilon < a_{N+1} < a_N + \epsilon, \ a_N - \epsilon < a_{N+2} < a_N + \epsilon, \ \ldots$

$\{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ளது—

$\therefore \ \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} a_n = \Lambda$-ம் $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} a_n = \lambda$-ம் இருக்கின்றன.

$\Lambda \neq \lambda$ என்க. $2\epsilon = \Lambda - \lambda$ என்க.

இப்போது

$| a_{n+p}-a_n | < \epsilon,\ n \geqq N,\ p = 1, 2, 3$ ......(i)

$a_n < \lambda + \frac{1}{2}\epsilon$, முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள n-ன் மதிப்புகளுக்கு...... (ii)

$a_n > \Lambda - \frac{1}{2}\varepsilon$, முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள n-க்கு......(iii)
$N_1 > N,\ N_2 > N$ என்பவை முறையே (ii)-யும், (iii)-யும் உறுதிப் படுத்தட்டும்.

$\therefore a_{N_1} < \lambda + \frac{1}{2}\epsilon,\ a_{N_2} > \Lambda - \frac{1}{2}\epsilon$

அதாவது $-a_{N_1} > -\lambda - \frac{1}{2}\epsilon$

$a_{N_2} - a_{N_1} > \Lambda - \lambda - \epsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$

இது (iii)-க்கு முரணானது.

$\therefore \Lambda = \lambda$

$\therefore$ இப்பகுதியின் தேற்றம் 4-ன்படி, $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்கு கிறது.

தேற்றம் 5

$\{a_n\}, \{b_n\}$ என்பவை வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசைகளானால்

(i) $\overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n \geqq \overline{\lim}\ (a_n + b_n)$

(ii) $\underline{\lim}\ a_n + \underline{\lim}\ b_n \leqq \underline{\lim}\ (a_n + b_n)$

குறிப்பு: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n$ என்பவற்றை முறையே, சுருக்கமாக, $\overline{\lim}\ a_n$, $\underline{\lim}\ a_n$ என்று எழுதிவிடலாம்.

நிறுவல்

(i) $\overline{\lim}\ a_n = \Lambda_1$ என்க.

(I) $a_n > \Lambda_1 + \frac{1}{2}\epsilon$, அதிகபட்சம் சில n-க்கு $(= N_1$ என்க)

(II) $a_n \leqq \Lambda_1 + \frac{1}{2}\epsilon,\quad n \geqq N_1$-க்கு

$\overline{\lim}\ b_n = \Lambda_2$ என்க.

(III) $\therefore\ b_n > \Lambda_2 + \frac{1}{2}\varepsilon$ அதிகபட்சம் சில n-க்கு $(= N_2$ என்க$)$

(IV) $b_n \leq \Lambda_2 + \varepsilon \qquad n \geq N_2$-க்கு.

(I), (III)-லிருந்து,

(V) $a_n + b_n > \Lambda_1 + \Lambda_2 + \epsilon$, $\min (N_1, N_2)$

(II), (IV) லிருந்து,

$$a_n + b_n \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 + \epsilon, \ \max (N_1, N_2)$$

ϵ என்பது யாதாமொரு எண் எண்பதால்

$$\overline{\lim}\ (a_n + b_n) \leq \Lambda_1 + \Lambda_2$$

$$\therefore \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 \geq \overline{\lim}\ (a_n + b_n)$$

இதுபோல் $\underline{\lim}\ a_n + \underline{\lim}\ b_n \leq \underline{\lim}\ (a_n + b_n)$

தேற்றம் 6

ஒழுங்கு வரிசைகள் $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$ என்க. a-ம் b-ம் முடிவுள்ள எண்களானல்

(i) $\{a_n + b_n\} \to a + b$

(ii) $\{a_n b_n\} \to ab$

(iii) $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\} \to \dfrac{1}{a}$.

(iv) $a_n \to a$, $b_n \to b\ (b \neq 0) \to \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \to \dfrac{a}{b}$, $\epsilon > 0$ எடுத்துக் கொள்க.

நிறுவல் (i)

$\therefore \quad | a_n - a | < \frac{1}{2}\varepsilon$, $n \geq N_1$ என்றவாறு N_1-ம்

$| b_n - b | < \frac{1}{2}\varepsilon$, $n \geq N_2$ என்றவாறு N_2-ம் இருக்கின்றன.

$$(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$$

$$| (a_n + b_n) - (a + b) | \leq | a_n - a | + | b_n - b |, \ \max (N_1, N_2)$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon, \ \max (N_1, N_2)$$

$$\therefore \quad \{a_n + b_n\} \to a + b$$

(ii) $a_n b_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + b(a_n - a) + a(b_n - b)$

$$\therefore \quad |a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| \; |b_n - b| + |b| \, |a_n - a| + |a| \; |b_n - b|$$

$$< \epsilon . \epsilon + |b| \epsilon + |a| \epsilon, \quad n \geq N$$

(அதாவது) $< (\epsilon + |a| \epsilon + |b| \epsilon, \; n \geq N, \; \epsilon < 1$ என்றால்

$$< \epsilon (1 + |a| + |b|), n \leq N \; [N = \max (N_1, N_2)]$$

$$< \frac{\epsilon'}{1 + |a| + |b|} . (1 + |a| + |b|) = \epsilon, \; n \geq N, \; \epsilon'\text{-க்குப்}$$

பதில் $\dfrac{\epsilon}{1 + |a| + |b|}$ ஐ எழுதினால்

$$\therefore \quad \{a_n b_n\} \rightarrow ab$$

(iii) $a \neq 0$ என்பதால், $|a| = 2\delta, \delta > 0$ என்க.

$\{a_n\} \rightarrow a$ என்பதால்

$n \geq N_1 \rightarrow |a_n - a| < \delta$ என்றவாறு N_1 இருக்கிறது.

$$\therefore \quad a - \delta < a_n < a + \delta$$

$$a - \delta < a_n \rightarrow |a| - |\delta| < |a_n|$$

$$\rightarrow 2\delta - \delta < |a_n|$$

$$\rightarrow \delta < |a_n|$$

$$\therefore \quad |a_n| > \delta$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - a_n}{a a_n}$$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - a_n|}{|a| \; |a_n|} < \frac{|a - a_n|}{2\delta . \delta}, \; n > N_1$$

ஆனால் $|a_n - a| < \epsilon, \; n \geq N_2$ என்றவாறு N_2 இருக்கிறது.

$$\therefore \quad \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| < \frac{\epsilon}{2\delta^2} \quad h \geqslant N = \max (N_1, N_2)$$

$$\therefore \quad \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \rightarrow \frac{1}{a} \qquad (a \neq 0)$$

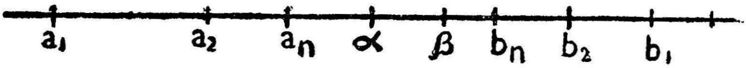
$$\text{(IV)} \quad \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \quad \therefore \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim . \frac{1}{b_n}$$

$$= a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0) \quad \text{(ii)-ன் படி.}$$

3·9. காண்டாரின் "இடைவெளிக்கூடு" தேற்றம் (Cantor's Theorem on Nested Intervals)

$\{I_n\}$ என்ற முடிவில்லாத மூடிய இடைவெளிகளின் ஒழுங்கு வரிசை என்க.

ஒவ்வொரு இடைவெளியும் அதற்கு முந்தைய இடைவெளிக்குள் முழுமையாக இருக்குமாறோ, அல்லது ஒவ்வொரு இடைவெளியும் அதற்கு முந்தைய இடைவெளியில் இருந்துகொண்டு இவ்விரு இடைவெளிகட்கும் ஒருமுனை பொதுவாகவோ இருக்கட்டும். மேலும் n ஆனது கந்தழியை நெருங்க I_nன் நீளம் ஆனது 0-ஐ நெருங்கட்டும். இந்நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்ட இடைவெளிகள் எல்லாவற்றுக்கும் பொதுவாக ஒரு புள்ளி— ஒரே ஒரு புள்ளி ஆனது. இவ்விடைவெளிகளுக்கு உள்ளாகவோ, அல்லது ஒரு கட்டத்திற்கு அப்பால் எல்லா இடைவெளிகளின் பொது முனையாகவோ இருக்கும்.



படம் 34

I_n என்ற இடைவெளியை $a_n \leqq x \leqq b_n$

$$\therefore \quad a_1 \leqq a_2 < a_3 \; . \; . \; . < b_1,$$

$$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \; . \; . \; . > a_1$$

$\{a_n\}$ ஆனது ஓரேமுறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை; b என்ற மேல் வரம்புள்ளது

∴ ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கும் பண்பினால் $\{a_n\}$ ஆனது

ஒரு எல்லைக்கு நெருங்குகிறது. இதனை α என்க.

$a_n \leqq \alpha$, ஒவ்வொரு நேர்முழு எண் n-க்கும்

இதேபோல், $\{b_n\}$ ஆனது ஓரேமுறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை. a என்ற கீழ்வரம்புள்ளது. $\therefore \{b_n\}$ ஆனது ஒரு எல்லேக்கு ஒருங்குகிறது. இதனை β என்க.

$b_n \geqq \beta$, ஒவ்வொரு நேர் முழு எண் n-க்கும் $\beta \nless \alpha$.

தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு

$\therefore \quad \beta \geqq \alpha.$

$\therefore$ ஒவ்வொரு n-க்கும்,

$b_n - a_n > \beta - \alpha \geqq 0$

அதாவது $[a_n, b_n]$ என்ற இடைவெளிக்குள் $[\beta - \alpha]$ என்ற இடைவெளி இருக்கிறது.

தேற்றத்தின்படி $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0. \quad \therefore \beta = \alpha$

அல்லது,

$$\forall_n, \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \to |a_n - \alpha| = |\alpha - a_n| < \frac{\epsilon}{2},$$
$$|b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$$

இப்போது $(b_n - a_n) - (\beta - \alpha) = (b_n - \beta) - (a_n - \alpha) = (b_n - \beta) + (\alpha - a_n)$

$$|(b_n - a_n) - (\beta - \alpha)| \leqq |b_n - \beta| + |\alpha - a_n| \qquad \forall_n$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ \forall_n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \beta - \alpha$$

ஆனல் தேற்றத்தின்படி $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0 \qquad \therefore \beta - \alpha = 0$

$\therefore \beta = \alpha].$

$\therefore$ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ என்பவைகளின் பொது எல்லேயான α ஆனது $a_n \leqq \alpha \leqq b_n$, ஒவ்வொரு நேர் முழுவெண் n-க்கும், என்றவாறு இருக்கிறது. $\therefore$ α ஆனது எல்லா இடைவெளிகளுக்கும் உரியதாக இருக்கிறது.

∴ α-ஐப்போல் வேறெந்த புள்ளியும் கிடையாது.

ஏனெனில் $\{a_n\}$க்கு α ஆனது l.u.b.; $\{b_n\}$க்கு α ஆனது g.l.b. ஒரு ஒழுங்கு வரிசைக்கு l.u.b.-ம், g.l.b.-ம் ஒரே முறைதான் வருவன.

∴ α ஆனது ஒரே ஒரு முறைதான் வரும்.

3·10. முக்கியமான கணக்குகள்

(1) $\{x^n\}$ன் ஒருங்கும் விதத்தை எல்லா x-க்கும் விளக்குக.

பல செயல் கூடு நிகழ்ச்சிகளாவன (Several possibilities):

(i) $\underline{x>1}$ என்க. ∴ $x=1+h$, $h>0$ என்க.

$$\therefore x^n = (1+h)^n > 1+nh \quad \text{(பெர்னோலியின் சமனின்மை)}$$
$$> nh$$
$$> \frac{\varepsilon}{h}\cdot h = \varepsilon, \quad n>\frac{\epsilon}{h} \text{ என்றவாறு}$$

n-ஐத் தேர்ந்தெடுத்தால்

$\frac{\epsilon}{h}$ன் முழுவெண்பாகத்தை $\left\{\frac{\varepsilon}{h}\right\}$ என்று குறிக்க.

ஒவ்வொரு $\epsilon>0$க்கும், $N(\varepsilon) = \left\{\frac{\epsilon}{h}\right\} + 1$ என்ற நேர் முழு எண் ஆனது $n \geqq N(\varepsilon) \to x^n > \varepsilon$ என்றவாறு இருக்கின்றது.

∴ $\{x^n\} \to +\infty$ இதனை $x^n \to +\infty$ என்றும் எழுதலாம்.

(ii) $\underline{x=1}$ என்க. ∴ $x^n=1$, எல்லா nக்கும்.

∴ $x^n \to 1$.

(iii) $\underline{0<|x|<1}$ என்க. $|x| = \frac{1}{1+h}$, $h>0$.

$$|x^n| = |x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{(1+nh)} < \frac{1}{nh} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon h}$$

∴ ஒவ்வொரு $\epsilon>0$-க்கும், ஒரு நேர் முழு எண்

$N(\epsilon) = \left[\frac{1}{\epsilon h}\right] + 1$ ஆனது.

$n \geq N(\varepsilon) \rightarrow |x^n| < \varepsilon$ என்றவாறு இருக்கிறது.

$\therefore \quad x^n \rightarrow 0$

குறிப்பு: $0 < x < 1$ என்ற செயற்கூடு நிகழ்ச்சியும் அடங்கியுள்ளது.

(iv) $\underline{\underline{x = 0}}$ என்க. $\therefore x^n = 0$, எல்லா n-க்கும்

$\therefore \quad x^n \rightarrow 0$

(v) $\underline{\underline{x = -1}}$ என்க. $x^n = 1$ ஆகவோ, -1 ஆகவோ இருக்கும்; n இரட்டை எண் என்றால் $x^n = 1$, n ஒற்றை எண் என்றால், $x^n = -1$.

$\therefore \quad \{x^n\}$ ஆனது முடிவுள்ளதாக அலைகிறது.

(vi) $x < -1$ என்க. $x^n = (-1)^n |x|^n$

$|x^n| = |x|^n \rightarrow +\infty$ ஆனதால் $\{x^n\}$-க்கு மேல்வரம்பும் இல்லை, கீழ்வரம்பும் இல்லை. $\therefore \{x^n\}$ ஆனது முடிவுற்றதாக அலைகிறது.

குறிப்பு

$-1 < x < 0$ என்ற செயற்கூடு நிகழ்ச்சி (iii)-ல் அடங்கியது. ஏனெனில் $x < 0 \rightarrow |x| = -x$

$x = -\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$ என்றால்

$$|x^n| = \alpha^n$$

$\therefore \quad$ (iii)-லிருந்து $\lim x^n = 0$.

(2) $\{n^\lambda\}$-ன் ஒருங்கு விதத்தை விவரி.

விடை

மூன்று செயல்கூடு நிகழ்ச்சிகள் (செ. கூ. நி.):

(i) $\underline{\underline{\lambda < 0}}$ என்க. $\lambda = -m, \quad m > 0$ என்க.

$$\therefore n^\lambda = n^{-m} = \frac{1}{n^m}$$

$\varepsilon > 0$ என்பது நம் விருப்பத்திற்கிணங்கிய மிகச் சிறிய எண் என்க.

$$\frac{1}{n^m} < \varepsilon \to n^m > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/m} \to n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/m}$$

$N_{\varepsilon} = 1 + \left[\frac{1}{\epsilon}\right]^{1/m} = n_0$ என்றால்,

$$n \geqq n_0 \to \frac{1}{n^m} < \epsilon$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n^m} \to 0$$

உதாரணமாக, $m=3$ என்க.

$$\frac{1}{n^3} < \epsilon \to n^3 > \frac{1}{\varepsilon} \to n > \frac{1}{\epsilon^{1/3}}$$

$\varepsilon = \cdot000000001$ என்றால், $\epsilon^{\frac{1}{3}} = \cdot001$

$$\therefore \quad n > \frac{1}{\cdot001} \to n > 1000$$

$$\therefore \quad n > 1000 \to \frac{1}{n^3} < \cdot000000001$$

குறைந்தபட்சம் $n = 1001$ என்றால் $\frac{1}{n^3} < \cdot000000001$

$$\therefore n \geqq 1001 \to \frac{1}{n^3} < \cdot000000001$$

$\therefore \quad \left(\frac{1}{n^3}\right) \to 0$, அல்லது, சுருக்கமாக, $\frac{1}{n^3} \to 0.$

(ii) $\lambda > 0$ என்க.

G என்பது யாதாமொரு கொடுக்கப்பட்ட நேர் மெய்யெண் என்க.

$n \geqq n_0 \to n^{\lambda} > G$ என்றவாறு n_0-ஐக் காணலாம்.

அதாவது குறைந்த பட்சம் $1+|G^{1/\lambda}|=n_0$ என்று எடுத்துக்கொண்டாலே போதும்.

$\therefore\ n\to\infty\ \to n^{\lambda}\to+\infty$

$\therefore\ \left\{n^{\lambda}\right\}$ விரிகின்றது.

உதாரணமாக, $G=10{,}000,\ \lambda=4$ என்றால்

$n^4>10{,}000\ \to n\geq 11$

$\therefore\ n=11$க்கு மேற்பட்ட எல்லா n-க்கும் $\left\{n^{\lambda}\right\}$ ஆனது விரிகின்றது.

(iii) $\lambda=0$ என்க.

$\therefore\ n^{\lambda}=n^0=1$, எல்லா n-க்கும்,

$\therefore\ \left\{n^{\lambda}\right\}\to 1.$

(3) $a_n>0,\ a_{n+1}\geq k\,a_n,\ k>1$ என்றால் எல்லா nக்கும் $a_n\to+\infty$ என்று நிறுவுக.

விடை

$a_n\geq k\,a_{n-1}$

$a_{n-1}\geq k\,a_{n-2}.\quad \therefore\ a_n\geq k^2\,a_{n-2}.$

இதுபோல், $a_n\geq k\,a_{n-1}\geq k^2\,a_{n-2}\geq\cdots\geq k^{n-1}a_1$

அதாவது $a_n\geq k^{n-1}a_1,\ \forall n$

$\therefore\ k\,a_n\geq k^n a_1,\quad \forall n$

இப்பகுதியின் (1)ன்படி, $k>1,\ \{k^n\}\to\infty$

அதாவது, $k^n\geq G,\ \forall n$, G யாதாமொரு பெரிய நேர் எண்.

$\therefore\ a_1 k^n\geq a_1 G,\ (a_1>0)$

$\because\ ka_n\geq k^n a_1,\quad \therefore\ k\,a_n\geq a_1 G;$

$\therefore \quad a_n \geqq \left(\frac{a^1}{k}\right) G, \quad (k>1) \; \forall n$

$\therefore \quad a_n \to +\infty, \; \forall n$

குறிப்பு: இந்த கணக்கின் முடிவு ஆனது, $n \geqq n_0$ என்ற நிபந்தனைக்கும் உண்மைதான். (இதனை நிறுவுக.)

(4) $a_n>0, a_{n+1} \leqq k\, a_n$. $0 < k < 1$ என்றால் எல்லா nக்கும். $\lim a_n=0$ என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

சென்ற கணக்கு (3)ன் முதலில் கண்டவாறு
$a_n \leqq k\, a_{n-1} \leqq k^2\, a_{n-2} \cdots \leqq k^{n-1} a_1$

$\therefore \quad a_n \leqq k^{n-1} a_1$

$0<k<1, \quad k^n \to 0$, இப்பகுதியின் கணக்கு (1)ன்படி.

அதாவது $k^n < \varepsilon, \; \varepsilon>0, \; \forall n$

(I) $\cdots \; \therefore a_1\, k^n < a_1 \epsilon, \forall n (a_1>0)$

ஆனால் $a_n \leqq k^{n-1} a_1, \; \forall n$

$\therefore \quad k a_n \leqq k^n a_1 \,, \; \forall n \; (k>0)$

$k a_n \leqq a\, \varepsilon, \; \angle \forall n$ (I) 1.லிருந்து

$a_n \leqq \left(\frac{a_1}{k}\right)\epsilon \, . \; \forall n$

$\therefore \quad n \to \infty \to a_n \to 0$.

(5) $n \geqq n_0 \to |a_{n+1}| \leqq k\, |a_n|, \quad 0<k<|$ என்றால் $\lim a_n = 0$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

மேற்கணக்கு (4)ல் $a_n > 0$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

இங்கே $|a_n| > 0$. $|a_n| = s_n$ என்க.

$\therefore \quad s_n > 0$. $\therefore$ கணக்கு (4)ன்படி, $\lim s_n = 0$.

அதாவது $|s_n| < \varepsilon, n \geqq n_0$

(அ-து) $\big|\,|a_n|\,\big| < \epsilon,\ n \geq n_0$

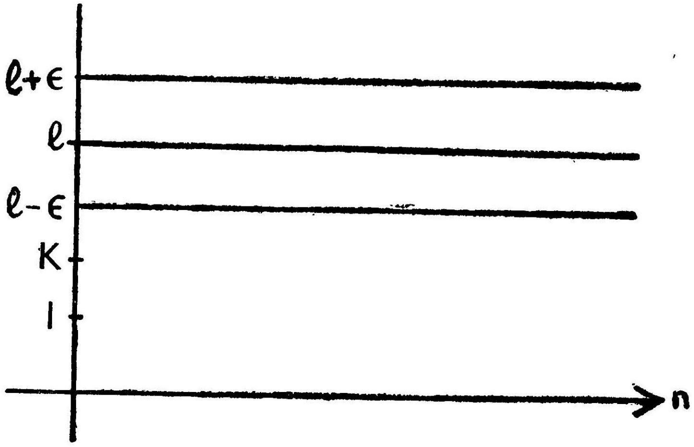
(அ-து) $|a_n| < \epsilon,\ n \geq n_0$

(அ-து) $\lim a_n = 0.$

(6) $a_n > 0, \lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l > 1$ என்றால் $a_n \to +\infty$ என நிறுவுக.

விடை

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \to \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \epsilon,\ n \geq N.$$



படம் 35

k என்பதை 1-க்கும் l-க்கும் நடுவாக எடுத்துக்கொள்.

$n_0 > N,\ n \geq n_0 \to \frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 1$ என்றவாறு k-ஐத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$\therefore$ இப்பகுதியில் கணக்கு (3)-லிருந்து, $a_n \to +\infty$

(7) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,\ -1 < l < 1$ என்றால் $\lim a_n = 0$ என நிறுவுக.

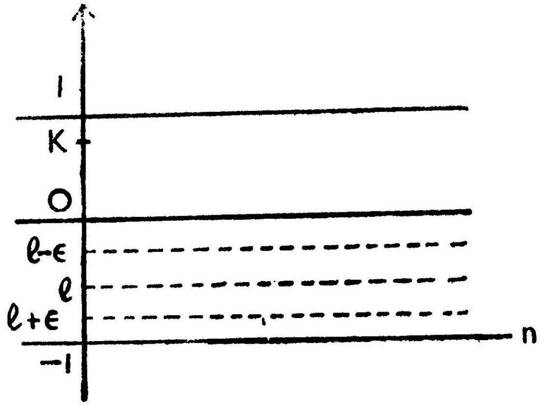
நிறுவல்

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \epsilon, \quad n \geq n_0$$

$0 < K < 1$ என்றவாறு k-ஐ எடுத்துக்கொண்டால்

$n \geq n_0 \rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq k$ என்றவாறு n_0-ஐ எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

∴ இப்பகுதியில் கணக்கு 5-ன்படி, $\lim a_n = 0$.



படம் 36

(8) r என்பது யாதாமொரு நேர் முழு எண் என்றால் $\{n^r x^n\}$-ன் ஒருங்கும் விதத்தை விவரி.

$a_n = n^r x^n$ என்க.

விடை

(i) $x = 0$ என்க. $\therefore n^r x^n = 0, \ \forall n.$

$\therefore a_n \rightarrow 0 \ \forall n.$

இப்போது,

$x \neq 0$ என்க. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^r x^{n+1}}{n^r x^n}$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^r \cdot x$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^r x$$

$$= x\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots r \text{ தடவைகள்}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = x\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots r \text{ தடவைகள்}$$

$$= x\left[\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right]\left[\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right]\cdots$$

r தடவைகள்

$$= x[1+0]\ [1+0]\cdots$$

$$= x$$

(ii) $x>1$ என்க.

அப்போது $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=x>1$ ∴ கணக்கு (6)ன்படி,

$a_n \to +\infty$

(iii) $x>0,\quad x<1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=x<1.$ ∴ கணக்கு (7)ன்படி, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

(iv) $x=1$ என்க. ∴ $a_n=n^r$. $r>0$ என்பதால் n ஆனது ∞-ஐ அணுக.

$n^r\to+\infty$ கணக்கு (2)-ன்படி

(v) $x<0$ என்க.

∴ $|a_n|=n^r|x|^n$ $|a_n|=b_n$, $|x|=y$ என்க.

∴ $|a_n|=n^r|x|^n$ என்பது $b_n=x^r y^n$ என்றாகும்.

$|x|<1$ என்க. அதாவது $y>1$ ∴ $b_n\to+\infty$

அதாவது $|a_n|\to+\infty$

$|x| < 1$ என்க. அதாவது $y<1$. $\therefore b_n \to 0$

அதாவது $|a_n| \to 0$

$x \leqq -1$ என்றால் $\{a_n\}$ ஆனது முடிவில்லாமல் அலைகிறது.

$-1<x<0$ என்றால் $\{a_n\}$ ஆனது முடிவுள்ளதாக அலைகிறது.

(9) $y>1$ என்றால், n ஆனது ∞-ஐ அணுக $\frac{n^s}{y^n} \to 0$ என்று, எல்லா s-க்கும், நிறுவுக.

நிறுவல்

(i) $s<0$ என்க.

$\therefore$ $n^s \to 0$ கணக்கு (2)-ன்படி

மேலும் $y>1 \to \frac{1}{y}<1$

$\frac{1}{y}=x$ என்றால் $\left(\frac{1}{y}\right)^n$, $y>1$ என்பது x^n, $x<1$ என்றாகும்.

கணக்கு (1)-ன்படி $x<1$, $x^n \to 0$. $\therefore \frac{1}{y^n} \to 0$

$\therefore n^s \to 0, \frac{1}{y^n} \to 0 \to n^s \frac{1}{y^n} = \frac{n^s}{y^n} \to 0{\cdot}0=0$ (3·8 தேற்றம் 6-ன்படி)

(ii) $s=0$ என்க. $\therefore$ $\frac{n^s}{y^n}=\frac{1}{y^n}$

ஆனால் $y>1$, $\frac{1}{y^n} \to 0$ (i)-ல் பார்த்தபடி

$\therefore$ $\frac{n^s}{y^n}=0$

(iii) $s>0$ என்க.

$y>1 \to (y)^{\frac{1}{2}s}>1$

$\therefore$ $y^{\frac{1}{2}s}=1+\lambda$, $\lambda>0$ என்று எழுதலாம்.

$a_n = \frac{n^s}{y^n}$ என்க.

$$(a_n)^{\frac{1}{2}s} = \left(\frac{n^s}{y^n}\right)^{\frac{1}{2}s} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(y^{\frac{1}{2}s})^n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(1+\lambda)^n}$$

ஆனால் $(1+\lambda)^n > n\lambda$

$$\therefore \frac{1}{(1+\lambda)^n} < \frac{1}{n\lambda}$$

$$\therefore (a_n)^{\frac{1}{2}s} < n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{n\lambda} = \frac{1}{\lambda n^{1/2}}$$

$$\therefore a_n < \left(\frac{1}{\lambda n^{1/2}}\right)^{2s} = \frac{1}{(\lambda^2 n)^s}$$

n-ஐ எவ்வளவுக்கெவ்வளவு பெரியதாய் எடுத்துக் கொள்கி ரேமோ அவ்வளவுக்கவ்வளவு $\frac{1}{(\lambda^2 n)^s}$-ம் சிறியதாகும்.

$\therefore$ $\epsilon > 0$ என்பது 0-க்கு நெருங்கிய மிகச்சிறிய நேர் எண்ணு ஞல், n-ஐ வேண்டிய அளவு பெரிய எண்ணுக எடுத்துக்கொண் டால், $a_n < \epsilon$ என்று ஆக்கலாம்.

$\therefore$ $a_n \to 0$

முக்கிய குறிப்புகள்

(1) $y = \frac{1}{x}$ என்ருல், $y > 1 \to \frac{1}{x} > 1 \to x < 1$

$\therefore$ இப்போது "$y > 1$ என்ருல், n ஆனது ∞-ஐ அணுக, $\frac{n^s}{y^n} \to 0$" என்பது "$0 < x < 1$ என்ருல், n ஆனது ∞-ஐ அணுக, $n^s x^n \to 0$" என்ருகும்.

மேலும், $-1 < x < 0$ என்ருல், $| n^s x^n | = n^s | x |^n \to 0$

$n^s x^n \to 0$, எல்லா s-க்கும், $-1 < x < 1$.

(2) $s>0,\ y>1$ என்றால் $\frac{n^s}{y^n}\to 0$ என்று பார்த்தோம் அல்லவா.

இப்போது $\frac{n^s}{y^n}=n^s.\ \frac{1}{y^n}$ என்று எழுதுவோம்.

n ஆனது ∞-ஐ அணுக, $n^s\to +\infty,\ y^n\to +\infty$

$\therefore$ 3·8 தேற்றம் 6-ன்படி $\therefore\ n^s\to +\infty,\ y^n\to +\infty\to +\infty.\frac{1}{+\infty},$

என்றுதானே எழுதவேண்டும்? ஆனால் $\frac{+\infty}{+\infty}$ என்பது பொருளற்ற தாகும். ஆதலால்தான் வேறு வழியில் $\frac{n^s}{y^n}\to 0$ என்று நிறுவினோம். இதன் பொருள் என்ன? n^s-ம், y^n-ம் தனித்தனியே $+\infty$-ஐ அணுகினாலும், y^n ஆனது n^s-ஐவிட மிக வேகமாக $+\infty$ஐ நெருங்குகிறது என்று பொருள்.

(10) λ என்பது நேர்மெய்யெண் என்றால் $\{\lambda^{1/n}\}$ன் நெருங்கும் விதத்தை விவரி.

விடை

$\lambda=1$ என்றால் $\lambda^{1/n}=1,\ \forall n$

$\therefore\ \lambda^{1/n}\to 1$

$\lambda>1$ என்க. $a_n=\lambda^{1/n}$ என்க.

$\therefore\ (a_n)^n=\lambda\ ;\ \forall n$

$\because\ \lambda>1,\to (a_n)^n>1\to a_n>1,\ \forall n$

இப்போது $a_{n+1}=\frac{1}{\lambda^{n+1}}$

$\therefore\ (a_{n+1})^{n+1}=\lambda.$

$\lambda=(a_{n+1})^n\ a_{n+1}>(a_{n+1})^n\ \because\ a_{n+1}>1$

ஆனால் $\lambda=(a_n)^n$

$\therefore\ (a_n)^n>(a_{n+1})^n$

$\therefore\ a_n>a_{n+1},\ \forall n$

$\therefore\ \{a_n\}=\{\lambda^{1/n}\}$ ஆனது இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை.

மேலும் ஒவ்வொரு $a_n>1$ என்பதால், $\{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ளது.

$\therefore$ வரம்புள்ள இறங்கும் ஒழுங்கும் வரிசை $\{a_n\}$ ஆனது அதன் g.l.b.-க்கு ஒருங்குகிறது.

$a_n>1,\ \forall n$ என்பதால் $\{a_n\}$-ன் ஒரு கீழ்வரம்பு 1 ஆகும்.

$\therefore$ g.l.b. $\not< 1$ $\quad\therefore \lim a_n \not< 1$.

$\therefore \lim a_n = 1+\epsilon$ என்க.

$\therefore$ ஒவ்வொரு $a_n>1+\epsilon$

(I) ... $\therefore (1+\epsilon)^n<a_n{}^n=\lambda\ \forall n$

ஆனால் $(1+\epsilon)^n > 1+n\epsilon > n\epsilon$ (பெர்னோலியின் சமனின்மை)

$m\epsilon>\lambda$ என்னுமாறு ஒரு m உள்ளது.

$\therefore (1+\epsilon)^m>1+\lambda$

ஆனால் இது (I)-ன் எதிர்மறுப்பு.

$\therefore \lambda>1,\ \lambda^{1/n}\to 1.$

இதுபோல் $0<\lambda<1$ என்றால், $\dfrac{1}{\lambda}>1.$

$\therefore \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^{1/n}\to 1$

$\lambda^{1/n}\to 1$

(11) மிக முக்கியமான உதாரணம் $\therefore$

$\{n^{1/n}\}\to 1$ என்று நிறுவுக.

$a_n=n^{1/n}$ என்க.

$\{1\}\to 1$ என்பது தெளிவு.

$a_n\to a,\ b_n\to b \to \{a_n-b_n\}\to a-b$ என்பதும் தெளிவு.

$\therefore \{n^{1/n}\}\to$ என்று நிறுவ, $\{n^{1/n}\}\to 1-1=0$ என்று நிறுவினால் போதுமானது.

வரை இலக்கணம்

ஒரு ஒழுங்கு வரிசை பூச்சியத்திற்கு ஒருங்கினுல் அதனைப் "பூச்சிய ஒழுங்கு வரிசை" (null sequence) என்போம்.

$\therefore$ $\{n^{1/n}-1\}$ ஆனது பூச்சிய ஒழுங்கு வரிசை என்று நிறுவினுல் போதுமானது.

$a_n = n^{1/n} - 1$ என்க.

$\therefore \quad 1 + a_n = n^{1/n}.$

$\therefore \quad (1+a_n)^n = n$

$n > 1 \rightarrow a_n > 0$

$n = (1+a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2n + \cdots$ (ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி)

$> 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} a^2n$ (ஈருறுப்பு விரித்தலின் உறுப்புகள் நேர் ஆதலால்)

$> \frac{n(n-1)}{2} a^2n$

$a_n^2 < \frac{2}{n-1} \leq \frac{2}{n-\frac{n}{2}} = \frac{4}{n}$ $(n \neq 1, n > 1$ (அதாவது) $n \geqq 2)$

$\therefore \quad a_n = |a_n| < \frac{2}{n^{1/2}}$

ஆனல் கணக்கு (2)-ன்படி $\frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow 0$

$\therefore \quad \left|\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \; n > n_0$

$\therefore \quad \left|\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}\right| < \varepsilon, \; n > n_0$

$\therefore \quad a_n < \epsilon, \quad n > n_0$

$\therefore \quad \{a_n\} \to 0$

$\therefore \quad \{a_n\} = \{n^{1/n} - 1\} \to 0 \quad \to \{n^{1/n}\} \to 1$

(12) மற்ெருரு மிக முக்கியமான எல்லை : $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n.$

இந்த ஒழுங்கு வரிசையின் எல்லை e என்று நமக்குத் தெரியும். e ஆனது "இயற்கை மடக்கைகளின் அடி" (Base of the natural logarithms) என்று நாம் அறிவோம். இந்த ஒழுங்கு வரிசையானது 2-க்கும் 3-க்கும் இடையே உள்ள எண்ணுக்கு ஒருங்குகிறது என்று நிறுவுவோம்.

ஈருறுப்புத் தேற்றம் வழி,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\frac{1}{n^3} + \cdots\cdots$$

$$\text{(I)} \qquad \cdots + \frac{n(n-1)(n-3)\cdots(n-\overline{r-1})}{1 \cdot 2 \cdots\cdots r} \cdot \frac{1}{n^r} + \cdots \frac{1}{n^n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + (n+1)\frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)\,(n)}{1 \cdot 2}\,\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\frac{1}{(n+1)^3} + \cdots$$

$$\text{(II)} \cdots + \frac{(n+1)n\,(n-1)\cdots[n+1-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdots r}\,\frac{1}{(n+1)^r} + \cdots \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

I-லும், II-லும் உள்ள விரித்தல்களின் உறுப்புகளை ஒப்பிடுவோம். (I)ன் முதலிரண்டு உறுப்புகளும், (II)ன் முதலிரண்டு உறுப்புகளும் சமம்.

(I)-ன் $(r+1)$-ஆவது உறுப்பை u என்றும், (II)-ன் $(r+1)$-ஆவது உறுப்பை v என்றும் கொண்டால்,

$$u<v \longleftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)\ldots n-(r-1)}{1\cdot 2\cdots r\cdot n^r}<\frac{(n+1)n(n-1)\ .\ [(n+1)-(r-1)]}{1\cdot 2\cdots r}\cdot\frac{1}{(n+1)^r}$$

$$\longleftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)\cdots n-(r-1)}{n^{r-1}}<\frac{n(n-1)\cdots[(n+1)-(n-1)]}{(n+1)^{r-1}}$$

ஆனல் $\frac{n-k}{n}<\frac{(n+1)-k}{n+1},\ k=1, 2, 3, \cdots, r-1$

அதாவது, $k=1, \frac{n-1}{n}<\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

$k=2, \frac{n-2}{n}<\frac{n+1-2}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$

$k=3, \frac{n-3}{n}<\frac{n+1-3}{n+1}=\frac{n-2}{n+1}$

$\frac{n-(r-1)}{n}<\frac{(n+1)-(r-1)}{n+1}$

இச்சமனின்மைகளையெல்லாம் நிரல்வழிப் பெருக்க,

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n(a-1)}{n}<\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdots\frac{(n+1)-(r-1)}{n+1}$$

(அதாவது) $\frac{(n-1)(n-2)\cdots[n-(r-1)]}{n^{r-1}}<\frac{n(n-1)\cdots[(n+1)-(r-1)]}{(n+1)^{r-1}}$

$\therefore\ u<v$

மேலும் (I)-ன் விரித்தலில் $(n+1)$ உறுப்புகளும், (II)-ல் $(n+2)$ உறுப்புகளும் உள்ளன; அதாவது பிந்தியதில் முந்தையதைவிட ஒரு உறுப்பு அதிகமாக உள்ளது. $\therefore \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை. $\therefore$ இது ஒரு முடிவுள்ள எல்லைக்காவது ஒருங்க வேண்டும்; அல்லது $+\infty$-யாவது அணுக வேண்டும்.

மேலும் (I)-ன் விரித்தலிலிருந்து,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<1+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}=3$$

$\therefore \left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ ஆனது மேல்வரம்புள்ளது.

$\therefore \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ஆனது மேல்வரம்புள்ள ஓரேமுறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

$\therefore \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது; ஒருங்கும் எல்லையை e என்க.

$\therefore \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}\to e.$ $\because$ e என்பது $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ன் l.u.b.

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}=2,\ 2\tfrac{1}{4},\ 2\tfrac{10}{27},$$

$\therefore$ l.u.b. >2

$\therefore$ $2<e<3$

(13) $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}\to 0,\ \forall x$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$a_n=\frac{x^n}{n!}$ என்றால், $a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdots\cdot\frac{n!}{x^n}=\frac{x}{n+1}$$

$\{x\} \to x$ ஏனெனில் x என்பது மாறிலி

$\left\{\frac{1}{n+1}\right\} \to 0$ ஏனெனில் போதிய அளவு பெரிய n-க்கு,

$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$

$(n > n_0$ மிகச்சிறிய $\epsilon > 0)$ $\therefore \frac{1}{n+1} \to 0.$

$$\therefore \left\{\frac{x}{n+1}\right\} = \left\{ x \right\} \cdot \left\{\frac{1}{n+1}\right\} \to x \cdot 0 = 0. < 1$$

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$$

$\therefore$ கணக்கு (7)-ன்படி, $a_n \to 0.$

3·11. சில ஒழுங்கு வரிசைகளின் எல்லைகளைக் கணக்கிடச் சுலபமான விதிகள்

ஏற்கனவேயே நாம் படித்தவைதாம் விதிகளாக வழங்கப் போகிறோம். (உதாரணம்: 3·8, தேற்றம் 6)

விதி 1

n ஆனது ∞-ஐ அணுக,

$$\begin{cases} a_n \to A, \quad b_n \to B \to a_n + b_n \to A + B \\ a_n \to A, \quad b_n \to B \to a_n - b_n \to A - B \\ k \text{ ஒரு மாறிலி}, a_n \to A \to ka_n \to k-A \end{cases}$$

உதாரணம் (1)

$$\left\{ 2 + \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\}$$

$a_n = 2,\ b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ என்றால்

$\{a_n\}\to 2$; ஏனெனில் $\{2\}$ என்பது மாறிலி ஒழுங்கு வரிசை.

$\{b_n\}=\{(\frac{1}{5})^n\}\to 0$ 3·10 கணக்கு (1)-ன்படி

$\therefore\ a_n+b_n\to 2+0=2$

$$\therefore\ \left\{2+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}\to 2.$$

உதாரணம் (2)

$$\left\{\left(2+\frac{7}{n}\right)\ \left(1-\frac{3}{n^2}\right)\right\}$$

$a_n=2+\frac{7}{n}$ என்றால் $\{2\}\to 2$; $\left\{\frac{7}{n}\right\}=7\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 7(0)=0$

$\therefore\ a_n\to 2+0=2$

$b_n=1-\frac{3}{n^2}$ என்றால் $b_n\to 1-0=1$

$$\therefore\ \left\{\left(2+\frac{7}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n^2}\right)\right\}=(2)\ (1)=2.$$

விதி 2

n ஆனது ∞-ஐ அணுக,

$$a_n\to A,\quad b_n\to B,\quad b_n\neq 0,\quad B\neq 0\to\ \frac{a_n}{b_n}\to\frac{A}{B}$$

உதாரணம் (3)

$$\left\{\frac{5^{-n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right\}$$

$$5^{-n}=\frac{1}{5^n}$$

$$\therefore\ \left\{\frac{1}{5^n}\right\}\to 0.$$

$$\left\{1+\frac{2}{n}\right\} \to 1 + 0 = 1$$

$$\therefore \quad \left\{\frac{5^{-n}}{1+\frac{2}{n}}\right\} = \frac{0}{1} = 0$$

விதி 3

(i) $a_n \to \infty$, அல்லது, $a_n \to -\infty \to \frac{1}{a_n} \to 0$

நிறுவல்

n-ன் மதிப்பு அதிகமாக அதிகமாக, $\frac{1}{a_n}$-ன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே வருகிறது. $\epsilon > 0$ என்பது மிகச்சிறிய நேர் எண் ணுனல், $\frac{1}{a_n} < \epsilon$, $n \geq n_0$ என்பது உண்மை.

$$\therefore \quad \frac{1}{a_n} \to 0.$$

(ii) $a_n \to +\infty$, $b_n \to$ முடிவுள்ள எல்லை $b \to a_n + b_n \to +\infty$

நிறுவல்

$b_n \to b$ என்பதால், n அதிகமாக அதிகமாக, b_n ஆனது b-ஐ நெருங்கும். ஆனுல் a_n ஆனது நம் விருப்பத்திற்கிணங்கிய பெரிய எண்ணேவிடப் பெரியது. b ஆனது பெரிய குறை யெண்ணுனுலும், n-ஐப் போதிய அளவு பெரியதாக எடுத்துக் கொண்டால், a_n ஆனது b_n-ஐ விழுங்கிவிடும்; அதாவது $a_n + b_n$ஐ மிகமிகப் பெரிய நேர் எண்ணுக்கலாம். அதாவது, $a_n + b_n \to +\infty$

(iii) $a_n \to -\infty$, $b_n \to$ முடிவுள்ள எல்லை $b \to a_n + b_n \to -\infty$

(iv) $a_n \to +\infty$, $b_n \to$ நேர் எல்லை $b \to a_n b_n \to +\infty$

(v) $a_n \to +\infty$, $b_n \to$ குறைஎல்லை $b \to a_n b_n \to -\infty$

விதி 4

$a_n = n$-ல் விகிதமுறு சார்பலன் என்ருல் என்ன செய்வது? விகிதமுறு சார்பலன் என்பது தொகுதியும் விகுதியும் n-ல் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கொண்ட எண் ஆகும்.

உதாரணமாக,

$$a_n = \frac{c_0 n^p + c_1 n^{p-1} + \ldots + c_p}{d_0 n^q + d_1 n^{q-1} + \ldots + d_q}, \quad c_0 \neq 0,\ d_0 \neq 0$$

தொகுதியில் n-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு, p;

விகுதியில், q

$\therefore$ நிகர அடுக்கு $= p-q$

$$a_n = \frac{n^p\left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_p}{n^p}\right)}{n^q\left(d_0 + \frac{d_1}{n} + \ldots + \frac{d^q}{n^q}\right)}$$

$$= \frac{n^{p-q}\left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \ldots + \frac{c_p}{n^p}\right)}{\left(d_0 + \frac{d_1}{n} + \ldots + \frac{d^q}{n^q}\right)}$$

$= n^{p-q}\dfrac{\xi_n}{\eta_n}$ என்றால் $\xi_n = c_0 + \dfrac{c_1}{n} + \cdots + \dfrac{c_p}{n^p}$

$$\eta_n = d_0 + \frac{d_1}{n} + \cdots + \frac{d_q}{n^q}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = c_0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = d_0$.

$\therefore \dfrac{\xi_n}{\eta_n} \to \dfrac{c_0}{d_0}$

n ஆனது ∞-ஐ அணுக $\begin{cases} p > q \to n^{p-q} \to \infty, \\ p < q \to n^{p-q} \to 0 \\ p = q \to n^{p-q} \to 1 \end{cases}$

$\therefore\ p > q,\ \dfrac{c_0}{d_0} > 0 \to a_n \to +\infty$

$p > q,\ \dfrac{c_0}{d_0} < 0 \to a_n \to -\infty$

$p < q \to a_n \to 0;$

$$p=q \rightarrow a_n \rightarrow \frac{c_0}{d_0}$$

(உ-ம்) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+n+n^2}{1+4n+5n^2}$?

$$a_n = \frac{2+n+n^2}{1+4n+5n^2} = \frac{n^2\left\{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right\}}{n^2\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n}+5\right\}}$$

$$= \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n}+5}$$

$$\frac{2}{n^2} \rightarrow 0; \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0; \quad \frac{4}{n} \rightarrow 0$$

$$\lim a_n = \tfrac{1}{5}$$

விதி 4

n ஆனது ∞-ஐ அணுக,

$\forall n,\ a_n < b_n;\quad a_n \rightarrow a,\quad b_n \rightarrow b \rightarrow a \leq b$

எப்படியெனில்,

$a_n < b_n$ என்பதால்

$a_n = b_n - c_n$ என்க.

$a_n \rightarrow a,\quad b_n \rightarrow b$ என்பதால் $c_n \rightarrow$ குறிப்பிட்ட எண் $= c$ என்க.

$\therefore\ a = b - c,\quad c \geq 0$

$\therefore\ a \leq b.$

உதாரணம்

$a_n = 2 - \dfrac{3}{n}$, $b_n = 2$ என்க.

$\therefore \quad a_n < b_n, \quad \forall n$

$a_n < 2 = a \quad b_n \to 2 = b \quad \therefore \; a = b$

3.12. கோஷியின் எல்லைத் தேற்றம் (Cauchy's Limit Theorem)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \text{ என்றால்}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to a \text{ என்று நிறுவுக.}$$

அதாவது,

$\{a_n\} \to a$ என்றால் $\left\{\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right\} \to a$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$a_n = a + b_n$ என்று எழுதினால்,

$a_n \to a \to b_n \to 0$

$\therefore$ நம் விருப்பத்திற்குரிய மிகச்சிறிய யாதாமொரு $\epsilon > 0$க்கு,

$n \geq n_0 \to b_n < \frac{\varepsilon}{2}$ என்றவாறு n_0 என்ற நேர் முழு எண் இருக்கிறது.

$\therefore \quad b_{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad b_{n_0+2} < \frac{\epsilon}{2}, \cdots, b_n < \frac{\epsilon}{2}$

$$\therefore \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n}{n}$$

$$< \frac{b_1 + \cdots + b_{n_0}}{n} + \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2}$$

$$< \frac{b_1 + \cdots + b_{n_0}}{n} + \frac{\epsilon}{2} \quad \because n \geq n_0$$

இப்போது, $r = \max(|b_1|, |b_2|, \cdots |b_{n_0}|)$ என்றால்

$$\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} < \frac{n_0 r}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

n_0-ம், r-ம் முடிவுள்ள எண்களாகையால்,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_0 r}{n} = 0$$

$\therefore\ n \geq n'_0 \to \frac{n_0 r}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ என்றவாறு ஒரு நேர் முழு எண் n'_0 இருக்கிறது.

$$\therefore\ \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad n \geq n'_0$$

$\therefore\ \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \to 0$, n ஆனது ∞-ஐ அணுகும்போது

ஆனால் $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = (a+b_1) + (a+b_2) + \cdots + (a+b_n)$

$$= \frac{na}{n} + \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

$$= a + \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a + \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

$$= a + 0$$

$$= a.$$

இந்தத் தேற்றத்தின் கீழ் சில மாதிரிக் கணக்குகள்

(1) $\lim (a_{n+1} - a_n) = l$ என்றால் $\lim \frac{a_n}{n} = l$ என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

$b_n = a_n - a_{n-1}$ என்க.

$\lim\ b_n = \lim (a_n - a_{n-1}) = l$

$b_1 = a_1 - 0$

$b_2 = a_2 - a_1$

$b_3 = a_3 - a_2$

.

.

.

$b_n = a_n - a_{n-1}$

இவற்றைக் கூட்ட, $b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_n$

கோஷியின் முதல் எல்லைத்தேற்றத்தின்படி,

$$\lim b_n = l \to \lim \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = l$$

$$\to \lim \frac{a_n}{n} = l.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}}{n} = 0$$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$a_n = \frac{2^n}{n!}$ என்றால் $\lim a_n = \lim \frac{2^n}{n!} = 0$

(3·10, கணக்கு 13-ன்படி)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 0$$

(அதாவது) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}}{n} = 0$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$$

என நிறுவுக.

நிறுவல்

$u_n = \sqrt[n]{n}$ என்க.

$\therefore \lim u_n = \lim \sqrt[n]{n} = 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n_1 + \cdots + u_n}{n} = 1$$

$$\therefore \lim \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = 0$ என்று காண்பிக்க.

நிறுவல்

$a_n = \frac{1}{n}$ என்றால், $a_n \to 0$

$\therefore$ கோஷியின் முதல் எல்லைத் தேற்றத்தின்படி,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$$

அதாவது $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$

3·13. கோஷியின் இரண்டாம் எல்லைத் தேற்றம்

எல்லா n-க்கும் $a_n > 0$ என்றும்

$\lim a_n = l,\ l \neq 0$ என்றும் கொண்டால்

$\lim (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = l$ என்று நிறுவுக.

துணைத்தேற்றம் 1

$\{r_n\} \to 0$ என்றால், $\{a^{r_n} - 1\} \to 0$, $(a>0)$ என்பது உண்மை.

நிறுவல்

3·10 கணக்கு (10)-ன்படி,

$$a^{1/n} \to 1,\ \frac{1}{a^{1/n}} \to 1.$$

$\therefore$ மிகச்சிறிய $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டால்

$n > n_1$, $| a^{1/n} - 1 | < \varepsilon$

$n > n_2$, $\left| \frac{1}{a^{1/n}} - 1 \right| < \epsilon$

என்றவாறு நேர் முழு எண்கள் n_1 , n_2-ஐக் காணலாம்.

$m = \max (n_1, n_2)$ என்றால்,

$a^{1/m} - 1$, $a^{-(1/m)} - 1$ ஆகிய இரண்டுமே $-\varepsilon$-க்கும் $+\epsilon$-க்கும் இடையில் உள்ளன. அதாவது, $a^{1/m}, a^{(-1/m)}$ ஆகிய இரண்டும் $1 - \epsilon$-க்கும் $1 + \epsilon$-க்கும் இடையில் உள்ளன.

$- \frac{1}{m} < \Lambda < \frac{1}{m}$ என்க.

$r < \frac{1}{m}$ என்பதை எடுத்துக் கொள்க.

$a > 1, \quad a^r = \frac{a^{1/m}}{a^{(1/m - r)}}$

$< a^{1/m} \qquad \because \quad r < \frac{1}{m} \rightarrow a^{(1/m) - r} < 1$

இதேபோல், $a^r > a^{-(1/m)}$, $a > 1$க்கு நிறுவலாம்.

$a \leq 1$-க்கும் $- \frac{1}{m} < r < + \frac{1}{m}$ என்றால்

$a^{-(1/m)} < a^r < a^{1/m}$ என்று நிறுவலாம்

$\therefore$ $\{r_n\} \rightarrow 0$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$n > n_0 \rightarrow | r_n | < \frac{1}{m}$ அல்லது $- \frac{1}{m} < r_n < + \frac{1}{m}$ என்றவாறு n_0-ஐக் காணலாம்.

$\therefore$ a^{r_n} ஆனது $1 - \epsilon$-க்கும் $1 + \epsilon$-க்கும் இடையில் உள்ளது.

$\therefore \quad |a^{r_n}-1| < \epsilon, \quad n > n_0$

$\therefore \quad a^{r_n} \to 1.$

துணைத்தேற்றம் 2

$a > 0, \quad x_n \to x \to a^{x_n} \to a^x$

நிறுவல்

$x_n \to x$ என்றால் $x_n - x \to 0$

$a^{x_n} - a^x = a^x\,(a^{x_n - x} - 1)$

துணைத்தேற்றம் 1-ல் $r_n = x_n - x$ என்றால், $a^{r_n} \to 1$ என்பது $a^{x_n - x} \to 1$ என்றாகும். $\therefore \frac{a^{x_n}}{a^x} \to 1$

அதாவது $a^{x_n} - a^x$

துணைத்தேற்றம் 3

எல்லா $x_n > -1, x_n \to 0 \quad \to \log(1+x_n) \to 0$

நிறுவல்

$\log(1+x_n)$-ன் அடி $b > 1$ என்றால், $\epsilon > 0$க்கு

$b_\epsilon - 1 = \epsilon_1, \quad 1 - b^{-\epsilon} = \epsilon_2$

$$\therefore \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{b^\epsilon - 1}{1 - b^{-\epsilon}}$$

$$= \frac{b^\epsilon - 1}{1 - \frac{1}{b^\epsilon}} = b^\epsilon$$

$\therefore \quad \epsilon_1 = b^\epsilon \cdot \epsilon_2 > \varepsilon_2 \quad \because \quad b^\epsilon \sum 1 + \varepsilon_1 > 1$

> 0

$\because \quad \{x_n\} \to 0$, ஒவ்வொரு $n > n_0 \to |x_n| < \epsilon_2$ என்றவாறு n_0 இருக்கிறது.

$\therefore$ எல்லா n-க்கும், $\quad -\epsilon_2 < x_n < \epsilon_1$

(அதாவது) $1-\epsilon_2 < 1+x_n < 1+\epsilon_1$

(அதாவது) $b^{-\epsilon} < 1+x_n < b^{+\epsilon}$

(அதாவது) $-\epsilon < \log_b(1+x_n) < +\epsilon$

$\therefore \; | \log(1+x_n) | < \epsilon$

$\therefore \; \log(1+x_n) \to 0$

துணைத்தேற்றம் 4

ஒவ்வொரு $x_n > 0,\; x > 0,\; x_n \to x \;\to \log x_n \to \log x$

நிறுவல்

$$\log x_n - \log x = \log \frac{x_n}{x} = \frac{\log [\, x + (x_n - x)\,]}{x}$$

$$= \log\left(1 + \frac{x_n - x}{x}\right)$$

$x_n \to x$ என்றால், $x_n - x \to 0$

$x < 0$ என்பதால் $\dfrac{x_n - x}{x} \to 0$

மேலும் $x_n > 0$ என்றால், $\dfrac{x_n - x}{x} > -1$

$\therefore$ துணைத்தேற்றம் 3-ன்படி, $\log\left(1 + \dfrac{x_n - x}{x}\right) \to 0$

$\therefore \; \log x_n - \log x \to 0$

$\therefore \; \log x_n \to \log x.$

எடுத்துக்கொண்ட தேற்றத்தின் நிறுவல்

$a_n \to l$ என்பதாலும், எல்லா a_n-ம் > 0 என்பதாலும், துணைத் தேற்றம் 4-ன்படி $\log a_n \to \log l$

$\therefore$ கோஷியின் முதல் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n}{n} \to \log l$$

அதாவது $\log\frac{(a_1 a_2 \ldots a_n)}{n} \to \log l$

$$\log (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \to \log l$$

$\therefore$ துணைத் தேற்றம் 2-ன்படி $e>0$,

$$e^{\log (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}} \to e^{\log l}$$

(அதாவது) $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \to l$

குறிப்பு

மேற்கண்ட தேற்றத்திற்குப் பயன்பட்ட துணைத் தேற்றங்கள் அத்தனையும் தங்களுக்கே உரிய முக்கியம் வாய்ந்த தனித்தனித் தேற்றங்களாகக் கருதலாம்.

இந்தத் தேற்றத்தின்கீழ் சில மாதிரிக் கணக்குகள்

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1}\right)^{1/n} = 1$ என நிறுவுக.

இப்போது $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} = \frac{\lim 1}{\lim 1 + \lim \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1.$$

$\therefore$ $a_n = \frac{n}{n+1}$ என்றால் $\lim a_n = 1$

$a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}, \ldots$

$\therefore$ கோஷியின் இரண்டாவது எல்லைத் தேற்றத்தின்படி,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = 1$$

அதாவது $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1}} = 1$

(2) n ஆனது ∞-ஐ அணுக,

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \frac{(n+1)^n}{n}} \to e$$

என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ என்றால் } a_n \to e$$

$$a_1 = (\tfrac{2}{1})^1 \; ; \quad a_2 = (\tfrac{3}{2})^2 \; ; \quad a_3 = (\tfrac{4}{3})^3 \cdots$$

$$[a_1 \; a_2 \ldots a_n]^{1/n} = \left[\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}$$

$\to e$ கோஷியின் இரண்டாவது எல்லைத்தேற்றத்தின்படி.

3·14. சில சுவையான கணக்குகள்

இந்த அத்தியாயத்தை முடிக்குமுன், சில சுவையான கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

(1) கோஷியின் ஒருங்கலின் பொதுவிதியைப் பயன்படுத்தி $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ என்றால் ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$ ஒருங்குகிறது என நிறுவுக.

நிறுவல்

$$\left| a_{n+p} - a_n \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p}}{n+p} \right|$$

$$= \left| (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)$$

$$- \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$$

[p ஒரு ஒற்றையெண்]

அல்லது $= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$

$$\cdots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) - \frac{1}{n+p}$$

(p இரட்டையெண்)

$$< \frac{1}{n+1}$$

n-ஐப் போதிய அளவு பெரியதாக எடுத்துக்கொண்டால், $\frac{1}{n+1}$-ஐ மிகச்சிறிய $\varepsilon>0$-ஐவிடச் சிறியதாகவும், அதாவது $n \geq n_0 \rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ என்றவாறு n_0-ஐக் காணலாம், அதாவது $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, அதாவது $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$

$$\therefore \left| a_{n+p} - a_n \right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

$\therefore$ கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதியின்படி $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(2) கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதியைக் கொண்டு,

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ என்றால்,

$\{a_n\}$ ஆனது விரிகின்றது என நிறுவுக.

நிறுவல்

கோஷியின் பொது விதியில் பயன்படும் $| a_{n+p} - a_n |$ என்ற தனிப் பெறுமானத்தில் p ஆனது யாதாமொரு முழு எண் என்றேம். குறிப்பாக, $p=n$ என்றால் தனிப்பெறுமானம்.

$$\therefore \left| a_{2n} - a_n \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n}$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

$\therefore |a_{2n}-a_n| > \frac{1}{2}$.

$\therefore$ நேர் எண் $\epsilon \leq \frac{1}{2}$-க்கு, $n > n_0 \rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon$ என்றவாறு n_0 இல்லை.

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்கவில்லை; எல்லா உறுப்புகளும் மிகை யெண்கள். எனவே, $\{a_n\}$ விரிகிறது.

(3) $a>0$, $c>0$, $a_0=a$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)$,

$b_n=\frac{c}{a_n}$ என்றால், $\{a_n\}$ம் $\{b_n\}$ம் ஒரே எல்லைக்கு ஒருங்கு கின்றன என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)$$

$$=a_n-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2_n+c}{a_n}\right)$$

$$=\frac{2a^2_n-a^2_n-c}{2a_n}=\frac{a^2_n-c}{2a_n}$$

இப்போது $a^2_n-c=\left[\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{c}{a_{n-1}}\right)\right]^2-c$

$$=\frac{1}{4}\left(a^2_{n-1}+2c+\frac{c^2}{a^2_{n-1}}\right)-c$$

$$=\frac{1}{4}\left(a_{n-1}-\frac{c}{a_{n-1}}\right)^2$$

$$\geqq 0$$

$\therefore$ $a_n-a_{n+1} \geqq 0$

(அதாவது) $a_n \geqq a_{n+1}$

(அதாவது) $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots$

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை.

இப்போது, $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{c}{a_n} \cdot \frac{a_{n+1}}{c} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

ஆனல் $a_n \geqq a_{n+1}$ (அதாவது) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq 1$

$\therefore \quad \frac{b_n}{b_{n+1}} \leqq 1 \quad \rightarrow b_n \leqq b_{n+1}$.

$\therefore \quad b_1 \leqq b_2 \leqq b_3 \leqq \cdots$

$\therefore \quad \{b_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

மேலும் $a_n - b_n = a_n - \frac{c}{a_n} = \frac{a_n^2 - c}{a_n} \geqq 0$

$\therefore \quad a_n \geqq b_n$

$\because \quad b_1 \leqq b_n \leqq a_n \leqq a_1$, $\therefore$ $\{a_n\}$-ம் $\{b_n\}$-ம் மேல், கீழ் வரம்புள்ளவை. $\therefore$ ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கும் பண்பினுல் (காண்க 3·6 தேற்றம் 2), $\{a_n\}$-ம், $\{b_n\}$-ம் ஒருங்கு கின்றன.

இப்போது, $\lim a_n = g$ என்க.

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2 + c}{a_n}\right)$

$\rightarrow \quad 2a_n\, a_{n+1} = a_n^2 + c$

$\rightarrow \quad \lim 2a_n\, a_{n+1} = \lim (a_n^2 + c)$

$\lim a_n = g$; $\therefore \lim a_{n+1} = g$

$\therefore \lim a_n\, a_{n+1} = g^2$

$\therefore \; 2 \lim a_n\, a_{n+1} = 2g^2$

$\lim a_n^2 = \lim a_n . a_n = \lim a_n \qquad \lim a_n = g^2$

$\therefore \quad 2g^2 = g^2 + c$

$\therefore \quad g^2 = c$

மேலும் $b_n = \frac{c}{a_n} \rightarrow a_n\, b_n = c$

$$\rightarrow \lim a_n b_n = \lim c$$

$$\rightarrow \lim a_n \lim b_n = c$$

$$\rightarrow g \lim b_n = c$$

$$\rightarrow \lim b_n = \frac{c}{g}$$

ஆனால் $g^2 = c \rightarrow g = \frac{c}{g}$

$$\rightarrow \lim b_n = g$$

$\therefore$ $\{a_n\}$-ம், $\{b_n\}$-ம் ஒரே எல்லை$(=g)$க்கு ஒருங்குகின்றன.

$\{a_n\}$-ம், $\{b_n\}$-ம் நேர் எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்டிருப்பதால் $g>0$.

குறிப்பு: g-ஐத் தவிர, $g^2_1 = c$-ஐ உறுதிப்படுத்தும் $g_1>0$ உள்ளதா ?

$g^2=c$, $g^2_1=c \rightarrow g^2-g^2_1=0 \rightarrow (g-g_1)\ (g+g_1)=0$

ஆனால் $g>0$, $g_1>0 \rightarrow g+g_1>0$

$\therefore\ g-g_1 = 0 \rightarrow g=g_1$

$\therefore$ $x^2=c$, $(c>0)$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு நேர் தீர்வுதான் உண்டு. இத்தீர்வை $\sqrt{c}$ அல்லது $+\sqrt{c}$ என்று குறிப்பர்.

ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசையின் எல்லை, அதன் g.l.b. அதுபோல் ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசையின் எல்லை அதன் l.u.b.

$$\therefore\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq \sqrt{c} \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq a_2 \leq a_1$$

(4) $\sqrt{6}$, $\sqrt{6\sqrt{6}}$, $\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}}$, ... என்ற ஒழுங்கு வரிசை ஒருங்குகிறது என்பதை நிறுவுக. இந்த ஒழுங்கு வரிசையின் எல்லையையும் காண்.

நிறுவல்

$a_1 = \sqrt{6}, \quad a_2 = \sqrt{6\sqrt{6}}, \quad a_3 \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}} \ldots,$

$a_n = \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}}} \ldots$ n தடவைகள் என்றால்

$a_2 = \sqrt{6a_1} \quad ; \quad a_3 = \sqrt{6a_2} \ldots$

$a_n = \sqrt{6a_{n-1}} \quad a_{n+1} = \sqrt{6a_n} \ldots$

$a^2_{n+1} - a^2_n = 6(a_n - a_{n-1})$

$a_n \gtrless a_{n-1}$ என்பதைப் பொறுத்து $a_{n+1} \gtrless a_n$

இதுபோல்

$a_{n-1} \gtrless a_{n-2}$ என்பதைப் பொறுத்து $a_n \lesseqgtr a_{n-1}$

$a_2 \gtrless a_1$ என்பதைப் பொறுத்து $a_3 \gtrless a_2$

ஆனால் $a^2_2 - a^2_1 = 6a_1 - a^2_1 = 6\sqrt{6} - 6 = 6(\sqrt{6} - 1) > 0$

$\therefore \quad a^2_2 > a^2_1 \rightarrow a_2 > a_1$

$\therefore \quad a_{n+1} > a_n$

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது ஒரேமுறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

மேலும் $a_{n+1} > a_n$ என்பதால்

$\sqrt{6a_n} > a_n$

$\therefore \quad 6a_n > a^2_n$

$6 > a_n \quad (\because \; a_n > 0,\; a_n$-ஆல் வகுத்தோம்)

$\therefore \quad a_n < 6$

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது, மேல்வரம்புள்ள ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$a_n \to a$ என்க.

$$\therefore \quad a_{n+1} = \sqrt{6a_n} \to a^2_{n+1} = 6a_n$$

$$\to a^2 = 6a$$

$$\to a(a-6) = 0$$

$a \neq 0$ ஏனெனில் ஒவ்வொரு a_n-ம் >2

$$\therefore \quad a = 6$$

$$\therefore \quad \{a_n\} \to 6$$

(5) k_1, a_1 என்பவை நேர் எண்களென்றும், $a_n = \dfrac{k}{1+a_{n-1}}$ என்றும் கொண்டால் $\{a_n\}$-க்கு எல்லை இருக்கிறது என்றும், இவ் வெல்லை $x^2+x-k=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் நேர் மூலம் என்றும் நிறுவுக.

நிறுவல்

$$a_n - a_{n-1} = \frac{K}{1+a_{n-1}} - a_{n-1}$$

$$a_n \gtrless a_{n-1} \longleftrightarrow \frac{K}{1+a_{n-1}} \gtrless a_{n-1}$$

$$\text{,,} \quad \longleftrightarrow K \gtrless a_{n-1} + a^2_{n-1}$$

முதல் செயற்கூடு நிகழ்ச்சி

$a_n > a_{n-1}$ என்க.

$$\therefore \quad a_2 > a_1, \quad a_3 > a_2, \ldots$$

$$\therefore \quad a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_{n-1} < a_n < \ldots$$

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

$a_1 > 0$ என்பதால், $a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ என்பவையும் நேர்.

$$K > a_{n-1} + a^2_{n-1}$$

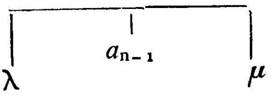
$$\therefore \quad a^2_{n-1} + a_{n-1} - K < 0$$

λ, μ என்பவை $a^2_{n-1} + a_{n-1} - K = 0$-ன் மூலங்கள் என்றால், $a^2_{n-1} + a_{n-1} - K \equiv (a_{n-1} - \lambda)\ (a_{n-1} - \mu)$

$\lambda\mu = -k < 0 \quad \because \ k > 0$ (கணக்குப்படி).

$\therefore \ \lambda < 0$ அல்லது $\mu < 0$, $\lambda < 0$ என்றால் $\mu > 0$ என்க.

இப்போது $a^2_{n-1} + a_{n-1} - K < 0 \rightarrow (a_{n-1} - \lambda)\ (a_{n-1} - \mu) < 0$



படம் 37

$\lambda < a_{n-1} < \mu \ (\because \ a_{n-1} > 0)$

இதேபோல்,

$\lambda < a_1 < \mu; \ \lambda < a_2 < \mu, \ldots$

$\lambda < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < \mu$

$\therefore \ \{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ள ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

$\therefore \ \{a_n\} \rightarrow l \ (l > 0 \quad \because \ a_n > 0, \ \forall n)$

ஆனால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது: $a_n = \dfrac{k}{1 + a_{n-1}}$

$$\lim a_n = \frac{\lim k}{\lim 1 + \lim a_{n-1}}$$

$$\therefore \ l = \frac{k}{1 + l}$$

(அதாவது) $l + l^2 = k$

(அதாவது) $l^2 + l - k = 0$

(அதாவது) $x^2 + x - k = 0$ என்ற சமன்பாட்டை l ஆனது உறுதிப்படுத்தும். $l > 0$ என்பதால் l ஆனது $x^2 + x - k = 0$-ன் நேர் மூலம். இப்போது, இரண்டாவது நிகழ்ச்சி :

$k < a_{n-1} + a^2_{n-1} \longleftrightarrow a_n < a_{n-1}$

முன்போல், $\{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ள ஒரே முறை இறங்கும் வரிசை என்றும் அதனால் $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது என்றும்,

ஒருங்கும் எல்லையானது முதல் நிகழ்ச்சியில் கண்ட அதே l தான் என்றும் நிறுவலாம்.

$\therefore$ நிகழ்ச்சி எதுவாயினும், $(a_n\}$ ஆனது $x^2+x-k=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் நேர்மூலத்திற்கு ஒருங்குகிறது.

(6) $a_{n+1}=\sqrt{k+a_n}$, $a_1>0$, $k>0$ என்றால், $\{a_n\}$ ஆனது $x^2-x-k=0$-ன் நேர்மூலத்திற்கு நெருங்குகிற ✓ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$$a_{n+1} = \sqrt{k+a_n}$$

$$\therefore \quad a^2_{n+1}=k+a_n$$

$$\therefore \quad a^2_n=k+a_{n-1}$$

$$\therefore \quad a^2_{n+1}-a^2_n=a_n-a_{n-1}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} \gtrless a_n \longleftrightarrow a_n \gtrless a_{n-1}$$

(அதாவது) $a_n \gtrless a_{n-1} \longleftrightarrow a_{n-1} \gtrless a_{n-2}$

$\cdot \qquad \cdot$

$\cdot \qquad \cdot$

$\cdot \qquad \cdot$

$$a_4 \gtrless a_3 \longleftrightarrow a_3 \gtrless a_2$$

$$a_3 \gtrless a_1 \longleftrightarrow a_2 \gtrless a_1$$

இரு செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன.

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி I $(a_2>a_1)$

$a_2>a_1$ என்றால், $a_3>a_2$, $a_4>a_3 \cdots$, $a_n>a_{n-1}$

அதாவது $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \cdots < a_{n-1} < a_n < a_{n+1} \cdots$

அதாவது $\{a_n\}$ ஆனது ஓரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை. மேலும் $a_1>0$, $a_1<a_2 \to a_2>0$. இதேபோல் மற்ற எல்லா உறுப்புகள் a_3, a_4, $\cdots$ a_{n+1}, $\cdots$ என்பவை நேர்.

$a_{n+1} > a_n \rightarrow \sqrt{k+a_n} > a_n$

(அதாவது) $k + a_n > a^2_n$

(அதாவது) $a^2_n - a_n - k < 0$

λ, μ என்பவை $a^2_n - a_n - k = 0$-ன் இரு மூலங்கள் என்றால், $\lambda\mu = -k$

$< 0 \quad (\because k > 0$ கணக்குப்படி)

$\therefore \lambda < 0$ அல்லது $\mu < 0$. $\lambda < 0$ என்றால்,

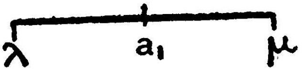
$\mu > 0$ என்க.

$a^2_n - a_n - k = (a_n - \lambda)\ (a_n - \mu)$

$a^2_n - a_n - k < 0 \rightarrow (a_n - \lambda)\ (a_n - \mu) < 0$

$\rightarrow \lambda < a_n < \mu \ (\because a_n > 0)$

$\therefore$ எல்லா n-க்கும்,



$\lambda < a_1 < a_2 \cdots a_n < \cdots < \mu$

படம் 38-A

$\therefore \{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை. வரம்புள்ள ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கும் பண்பினால்,

$\{a_n\} \rightarrow l \qquad (l > 0 \ \because a_n > 0, \forall n)$

$\therefore \{a_{n+1}\} \rightarrow l$

ஆனால் $a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}$ (கணக்குப்படி)

$\therefore a^2_{n+1} = k + a_n$

$\therefore \lim a^2_{n+1} = \lim (k + a_n)$

$l^2 = k + l$

$l^2 - l - k = 0.$

$l > 0$ என்பதால் l ஆனது $x^2 - x - k = 0$-ன் நேர்மூலம்.

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி 2

$a_2 < a_1$ என்றால் $\{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ள ஒரே முறை இறங்கும் வரிசை என்றும், இந்நிகழ்ச்சியிலும் $\{a_n\}$ ஆனது $x^2 - x - k > 0$-ன் நேர் மூலத்திற்கே ஒருங்குகிறது என்றும் நிறுவலாம்.

(7) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$ எனக் காண்பிக்க.

நிறுவல்

$$a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \text{ என்க.}$$

$$a_n = \left| \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right|$$

ஆனால் $\left| \sin \frac{n\pi}{2} \right| < 1$

$$| a_n | < \frac{1}{n}$$

ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட மிகச்சிறிய $\epsilon > 0$-க்கு,

$n \geq n_0 \to \left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon$ என்றவாறு n_0-ஐக் காணலாம்.

$$\therefore | a_n | < \epsilon, \quad n \geq n_0$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n \to 0.$$

(8) $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n$ என்க.

$\lim a_n = \lim c_n = l$ என்றால் $\lim b_n = l$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$\lim a_n = l$ என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட சிறிய $\epsilon > 0$-க்கு $n \geq n_0 \to l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ என்றவாறு n_0-ஐக் காணலாம்.

இதுபோல் $\lim c_n = l$ என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட அதே $\epsilon > 0$-க்கு,

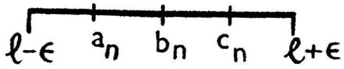
$n \geq n_1 \to l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$ என்றவாறு n_1-ஐக் காணலாம்.

$n' = \max(n_0, n_1)$ என்றால்

$l-\epsilon < a_n < l+\epsilon \quad n \geqq n'$,

$l-\epsilon < c_n < l+\epsilon \quad n \geqq n'$

கணக்கின்படி, $a_n \leqq b_n \leqq c_n$



படம் 38.B

$\therefore \quad l-\epsilon < a_n \leqq b_n \leqq c_n < l+\epsilon$

$\therefore \quad l-\epsilon < b_n < l+\epsilon, \quad n > n'$

$\therefore \quad \lim b_n = l$

(9) $a_1 \neq b_1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$,

$b_n = \sqrt{a_{n-1}\ b_{n-1}}, \quad n \geqq 2$ என்றால்

$\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் வரிசை என்றும்,

$\{b_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் வரிசை என்றும் நிறுவுக.

மேலும் ஒவ்வொரு ஒழுங்கு வரிசையும் ஒரே எல்லைக்கே ஒருங்குகிறது என்றும் காண்பிக்க.

நிறுவல்

$$a_n - b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) - \sqrt{a_{n-1}\ b_{n-1}}$$

A.M. $\geqq$ G.M.

$\therefore \quad a_n - b_n > 0$

(I) $\therefore \ a_n > b_n, \quad n = 1, 2, \cdots n-1, n, \cdots$

(அதாவது) $a_1 > b_1 \quad a_2 > b_2, \cdots, \quad a_{n-1} > b_{n-1}, \quad a_n > b_n, \ldots$

மேலும் $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$

$$< \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-1}) = a_{n-1} \quad \because a_{n-1} > b_{n-1}$$

$\therefore \quad a_n < a_{n-1}, \quad n \geqq 2$

(அதாவது) $a_2 < a_1, \ a_3 < a_2, \ a_4 < a_3, \cdots, a_n < a_{n-1} \cdots$

(II) $\therefore \quad a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_{n-1} > a_n > \cdots$

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை.

மேலும், $b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$

$> \sqrt{b_{n-1} b_{n-1}} = b_{n-1} \quad \because \quad a_{n-1} > b_{n-1}$

$\therefore \quad b_n > b_{n-1}, \; n \geq 2.$

(அதாவது) $b_2 > b_1, \quad b_3 > b_2, \quad b_4 > b_3 \cdots$

(III) (அதாவது) $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_{n-1} < b_n < \cdots$

$\therefore$ $\{b_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

(I), (II), (III) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots > b_n > \ldots > b_2 > b_1$

இதனால் பெறப்படுவது யாதெனின், $\{a_n\}$-ன் கீழ்வரம்பு, b_1 $\{b_n\}$ன் மேல்வரம்பு, a_1

வரம்புள்ள ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசை ஒருங்கும் பண்பை ஒட்டி

$\lim a_n = l$, $\lim b_n = l'$ என்க.

கணக்கின்படி,

$$a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$$

அதாவது $\lim a_n = \tfrac{1}{2}(\lim a_{n-1} + \lim b_{n-1})$

(அதாவது) $l = \tfrac{1}{2}(l + l')$

(அதாவது) $2l = l + l'$

$\therefore \quad l = l'$

அல்லது $b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$ என்றால் $b^2_n = a_{n-1} b_{n-1}$

$\therefore \quad l'^2 = ll' \rightarrow l' = l.$

(10) $\forall_n, a_n > 0$ என்றும், $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ என்றும் கொண்டால் $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = l$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட மிகச் சிறிய $\epsilon > 0$க்கு, $n \geq n_0 \to l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$ என்றவாறு n_0-ஐக் காணலாம்.

$$l - \epsilon < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < l + \epsilon$$

$$l - \epsilon < \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < l + \epsilon$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$l - \epsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < l + \epsilon$$

இந்த $(n - n_0)$ சமனின்மைகளைப் பெருக்கினால்,

$$(l - \epsilon)^{n-n_0} < \frac{a_n}{a_{n_0}} < (l + \varepsilon)^{n-n_0}$$

இதை

$$\left\{ \begin{array}{l} (l-\epsilon)^{n-n_0} < \dfrac{a_n}{a_{n_0}} \\ \dfrac{a_n}{a_{n_0}} < (l+\varepsilon)^{n-n_0} \end{array} \right.$$

என்றவாறு பிரித்து எழுதலாம்.

$$(l - \epsilon)^{n-n_0} < \frac{a_n}{a_{n_0}}$$

$$\rightarrow (l-\epsilon)^n < \frac{a_n}{a_{n_0}}(l-\epsilon)^{n_0}$$

$$\rightarrow (l-\epsilon)^n > \frac{a_n}{a_{n_0}} l^{n_0}$$

இஃதேபோல்

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < (l+\epsilon)^{n-n_0}$$

$$\rightarrow \frac{a_n}{a_{n_0}}(l+\epsilon)^{n_0} < (l+\epsilon)^n$$

$$\rightarrow \frac{a_n}{a_{n_0}} l^{n_0} < \frac{a_n}{a_{n_0}}(l+\epsilon)^{n_0} < (l+\epsilon)^n$$

$$\therefore (l-\epsilon)^n < \frac{a_n}{a_{n_0}} l^{n_0} < (l+\epsilon)^n$$

$$\therefore \frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}(l-\epsilon)^n < \frac{a_n}{a_{n_0}} l^{n_0} \cdot \frac{a_{n_0}}{l^{n_0}} < \frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}(l+\epsilon)^n$$

$$\frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}(l-\epsilon)^n < a_n < \frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}(l+\epsilon)^n$$

$$\therefore \left(\frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}\right)^{1/n}(l-\epsilon) < a_n^{1/n} < \left(\frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}\right)^{1/n}(l+\epsilon)$$

ஆனல் $\frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}$ என்பது முடிவுள்ள எண்.

மேலும் $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \therefore \left(\frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}\right)^{1/n} \rightarrow \left(\frac{a_{n_0}}{l^{n_0}}\right)^0 = 1$

$$\therefore l-\epsilon < a_n^{1/n} < l+\epsilon, \quad n \geq n_0$$

$$\therefore \lim_{n\rightarrow\infty} a_n^{1/n} = l$$

(11) மேற்கண்ட கணக்கு (10)-ஐப் பயன்படுத்தி $\lim n^{1/n} = 1$ என நிறுவுக.

விடை

$a_n = n$ என்க.

$\forall_n,\ n>0 \ \therefore\ a_n>0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = 1$$ (மேற்கண்ட கணக்கு (10)-ன்படி)

$$\therefore\ n^{1/n} \to 1$$

(12) $x_1 > 0,\quad x_2 > 0,\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ என்றால் $x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n-1} \cdots$ என்ற ஒழுங்கு வரிசையும் $x_2, x_4, x_6, \cdots x_{2n}, \cdots$ என்ற ஒழுங்கு வரிசையும் ஒரே எல்லையான $\frac{1}{3}(x_1+2x_2)$க்கு ஒருங்குகின்றன என நிறுவுக.

$x_1>x_2$ ஆகவோ, $x_1<x_2$ ஆகவோ இருக்கலாம்.

$x_1 > x_2$ என்க.

கொடுக்கப்பட்டது: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$

$n=2$-க்கு $\quad x_3 = \frac{1}{2}(x_2+x_1)$

$$x_1<x_2 \to x_3 < \tfrac{1}{2}(x_2+x_2) = x_2$$

$$x_1<x_2 \to x_3 > \tfrac{1}{2}(x_1+x_1) = x_1$$

$$\therefore\ \underline{x_1<x_3<x_2}$$

$\underline{x_3 < x_2}$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$

$n=3$-க்கு $x_4 = \frac{1}{2}(x_3+x_2)$

$$x_3<x_2 \to x_4 < \tfrac{1}{2}(x_2+x_2) = x_2$$

$$x_3<x_2 \to x_4 > \tfrac{1}{2}(x_3+x_3) = x_3$$

$$\therefore\ \underline{x_3<x_4<x_2}$$

$x_3<x_4 \qquad x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$

$n=4$-க்கு, $\qquad x_5=\frac{1}{2}(x_4+x_3)$

$x_3<x_4 \rightarrow x_5<\frac{1}{2}(x_4+x_4)=x_4$

$x_3<x_4 \rightarrow x_5>\frac{1}{2}(x_3+x_3)=x_3$

$\therefore \quad \underline{x_3<x_5<x_4}$

இதுபோல்,

$x_5<x_6<x_4\ , \quad x_5<x_7<x_6$

$x_7<x_8<x_6\ , \quad x_7<x_9<x_8\ , \ \ldots$ என்று காண்பிக்கலாம்.

இவ்வெல்லா சமனின்மைகளையும் ஒருங்கே இணைத்து $x_1<x_3<x_5<x_7<x_9< \ldots <x_8<x_6<x_4<x_2$ என்றெழுதலாம்.

இதனால் பெறப்படுவது யாதெனின்,

$\{x_{2n-1}\}$ ஆனது வரம்புள்ள ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என்பதும்

$\{x_{2n}\}$ ஆனது வரம்புள்ள ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை என்பதுமாம்.

வரம்புள்ள ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கும் பண்புப் படி,

$\{x_{2n-1}\}$ம், $\{x_{2n}\}$ம் ஒருங்குகின்றன.

$\{x_{2n-1}\}\rightarrow l, \quad x_{2n}\rightarrow l'$ என்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$ல் n-க்குப் பதில் $2n$-ஐப் பிரதியிடு.

$x_{2n+1}=\frac{1}{2}(x_{2n}+x_{2n-1})$

$\therefore \quad l=\frac{1}{2}(l'+l)$

$\therefore \quad l=l'$

ஆனல் n-க்குப் பதில் $2n+1$-ஐப் பிரதியிட்டால்,

$x_{2n+2}=\frac{1}{2}(x_{2n+1}+x_{2n}) \qquad \therefore \ l'=\frac{1}{2}(l+l')$

$\therefore \ l=l'.$

l என்பது யாதெனக் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது: $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$ ......(i)

$n=2$-க்கு, $x_3=\frac{1}{2}(x_2+x_1)$

$$x_3-x_1=\frac{1}{2}(x_1-x_2) \quad \text{......(ii)}$$

$n=3$-க்கு, $x_4=\frac{1}{2}(x_3+x_2)$

$$x_4-x_3=\frac{1}{2}(x_3+x_2)-x_3$$
$$=\frac{1}{2}(x_2-x_3)$$
$$=-\frac{1}{2}(x_3-x_2)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x_1-x_2)$$
$$=-\frac{1}{4}(x_1-x_2) \quad \text{......(iii)}$$

$$\therefore \quad x_4-x_2=(x_4-x_3)+(x_3-x_2)$$
$$=\frac{1}{4}(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(x_1-x_2)$$
$$=(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) \quad \text{......(iv)}$$

$n=4$-க்கு,

$$x_5=\frac{1}{2}(x_4+x_3)$$
$$x_5-x_4=\frac{1}{2}(x_4+x_3)-x_4$$
$$=\frac{1}{2}(x_3-x_4)$$
$$=-\frac{1}{2}(x_4-x_3)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)(x_1-x_2)$$
$$=\frac{1}{8}(x_1-x_2)$$

$$\therefore \quad x_5-x_2=(x_5-x_4)+(x_4-x_2)$$
$$=\frac{1}{8}(x_1-x_2)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)(x_1-x_2)$$
$$=(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$$
$$=(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)$$

இதுபோல் $x_6-x_2=(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)$

$$=(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}\right)$$

$$x_7-x_2=(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$$
$$=(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}\right)$$

$$\therefore \quad x_n - x_2 = (x_1 - x_2) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \ldots\ldots (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-2}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \ldots\ldots (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)\ 1 \left\{\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-2}}{1-(-\frac{1}{2})}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2)\,[1-(-\tfrac{1}{2})^{n-2}]$$

$$x_n = \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2)\,[1-(-\tfrac{1}{2})^{n-2}] + x_2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2)\left[\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} (-\tfrac{1}{2})^{n-2}\right] + \lim_{n\to\infty} x_2$$

ஆனால் 3·10 கணக்கு (1), (iii)-ன்படி $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2)\,.\,1 + x_2$$

$$= \tfrac{1}{3}(x_1 + 2x_2)$$

x_n-ல் n ஆனது இரட்டை எண்ணாகவோ ஒற்றை எண்ணாகவோ இருக்கலாம். ஆனால் ஏற்கனவே, $\{x_{2n}\}$-ம் $\{x_{2n-1}\}$-ம் ஒரே எல்லைக்கே ஒருங்குகின்றன எனக் கண்டோம்.

$$\therefore \quad l = \tfrac{1}{3}(x_1 + 2x_2)$$

(13) $a>0$, $0<s_1<b$ என்றால்,

ஒழுங்கு வரிசை $s_1 = a$, $s_2 = \sqrt{\dfrac{ab^2 + s_1^2}{a+1}}$, . . . ,

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + s^2 n}{a+1}}, \; \ldots, \quad \text{என்பது}$$

எப்போதுமே வரம்புள்ள ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என்று காண்பிக்க;

n ஆனது ∞-ஐ அணுக, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$-ஐக் காண்.

விடை

$s_1 < b,\; s_1 = a$ என்றால் $a < b$

$$\therefore \; a^2 < b^2$$

$$\therefore \; s^2_{n+1} - s^2_n = \frac{ab^2 + s^2_n}{a+1} - \frac{ab^2 + s^2_{n-1}}{a+1}$$

$$\therefore \; s^2_{n+1} - s^2_n = s^2_n - s^2_{n-1}$$

$$(s_{n+1} + s_n)\,(s_{n+1} - s_n) = (s_n + s_{n-1})\,(s_n - s_{n-1})$$

$(s_{n+1} + s_n)$-ம், $(s_n + s_{n-1})$-ம் நேர் எண்கள்.

$s_{n+1} \gtrless s_n$ என்பது $s_n \gtrless s_{n-1}$-ஐப் பொறுத்து

$\therefore\; s_3 \gtrless s_2$ என்பது $s_2 \gtrless s_1$-ஐப் பொறுத்து

$s_4 \gtrless s_3$ என்பது $s_3 \gtrless s_2$-ஐப் பொறுத்து

... ...

$s_2 > s_1$ என்றால் $s_3 > s_2$ அதாவது $s_1 < s_2 \rightarrow s_2 < s_3$

$s_3 > s_2$ என்றால் $s_4 > s_3 \ldots$ அதாவது $s_2 < s_3 \rightarrow s_3 < s_4 \ldots$

இப்போது $s_1{}^2 - s_2{}^2 = a^2 - \dfrac{ab^2 + a^2}{a+1}$

$$= \frac{a^3 + a^2 - ab^2 - a^2}{a+1} = \frac{a^3 - ab^2}{a+1}$$

$$= \frac{a\,(a^2 - b^2)}{a+1}$$

$$< 0 \; (\because\; a^2 < b^2)$$

$\therefore \quad s_1^2 - s_2^2 < 0$

(அதாவது) $(s_1 - s_2)\ (s_1 + s_2) < 0$

ஆனால் $s_1 + s_2 > 0$

$\therefore \quad s_1 - s_2 < 0 \qquad \therefore \quad s_1 < s_2$

$\therefore \quad s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \ldots\ldots < s_n < \ldots$

$\therefore$ $\{s_n\}$ ஆனது ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

$s_1 > 0,\ a > 0,\ b > 0$ என்பதால் $\{s_n\}$-ன் உறுப்புகள் எல்லாம் நேர்.

$$s^2_{n+1} = \frac{ab^2 + s^2_n}{a+1},\ \forall n$$

$s_n < s_{n+1}$ என்பதால்

$$s^2_{n+1} < \frac{ab^2 + s^2_{n+1}}{a+1}$$

$$(a+1)\ s^2_{n+1} < ab^2 + s^2_{n+1}$$

$$as^2_{n+1} < ab^2$$

$$s^2_{n+1} < b^2$$

$$s_{n+1} < b. \qquad \forall n$$

$\therefore \quad s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < s_{n+1} \ldots < b$

$\therefore$ $\{s_n\}$ ஆனது வரம்புள்ள ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

$\therefore$ ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கும் பண்பினால்,

$\{s_n\}$ ஆனது முடிவுள்ள எல்லைக்கு ஒருங்குகிறது.

$\{s_n\} \to l$ என்க.

$$s_{n+1} = \frac{\sqrt{ab^2 + s^2_n}}{a+1} \to \lim s_{n+1} = \lim \frac{\sqrt{ab^2 + s^2_n}}{a+1}$$

$$\rightarrow l=\frac{\sqrt{ab^2+l^2}}{a+1}$$

$$\rightarrow l^2=\frac{ab^2+l^2}{a+1}$$

$$\rightarrow al^2+l^2=ab^2+l^2$$

$$\rightarrow l^2=b^2$$

$$\rightarrow l=b$$

$$\therefore \quad \{s_n\}\rightarrow b.$$

(15) இடைவெளிகள் கூடைப் பயன்படுத்தி பொல்ஸாஞே-வையெர்ஸ்ட்ராஸ் தேற்றத்தை நிறுவுக.

தேற்றம்

I என்பது $a\leqq x\leqq b$ என்ற மூடிய வரம்புள்ள இடைவெளி என்க. I-ன் முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள் அமைக்கும் கணத்தை S என்க.

அப்படியாஞல் I-ல் S-ன் திரட்சிப்புள்ளி இருக்கிறது.

நிறுவல்

நிறுவலின் திட்டம்: I-ஐ இரு சம பாகங்களாக வெட்டுக. S-ன் முடிவில்லாத அநேக பல புள்ளிகள் முதல் பாதியிலோ அல்லது மற்ற பாதியிலோ இருக்க வேண்டும். அப்படி இருக்கும் பாதியை இரு சம பாதிகளாய் வெட்டுக. இவ்விரு பாதிகளில் ஒன்றில் S-ன் முடிவில்லாத அநேக பல புள்ளிகள் இருக்க வேண்டும். இப்படியே இச்செய்கையை முடிவில்லாமல் தொடர்க. இதஞல் ஒரு புள்ளிக்குச் சுருங்கும் உள்ளுக்குள் ஒன்ருன டெலஸ்கோப்பு இடைவெளிகளின் ஒழுங்கு வரிசை கிடைக்கின்றது. இப்போது இப்புள்ளிதான் S-ன் திரட்சிப்புள்ளி என்று நிறுவ வேண்டும். எவ்வாறு?

I-ன் இரு உள் இடைவெளிகளை (Sub-intervals)

$I' : a\leqq x\leqq \frac{a+b}{2}$, $I'' : \frac{a+b}{2}\leqq x\leqq b$, என்றவாறு எடுத்துக் கொள்க.

$S \subset I' \cup I''$, S ஒரு முடிவில்லாத கணம் என்பதால் I'-ஆவது அல்லது I''-ஆவது—குறைந்த பட்சம், ஏதாவது ஒன்றிலாவது— S-ன் முடிவில்லாத அநேக பல புள்ளிகள் இருக்க வேண்டும். (இரண்டிலும் முடிவில்லாத புள்ளிகள் இருக்கலாம்.)

இந்தப் பண்புடைய ஒரு உள் இடைவெளியைத் தேர்ந்தெடுக்க. இதை I_1 என்க. I_1-ன் முனைகள் $a_1 = a$ அல்லது $\frac{a+b}{2}$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ அல்லது b என்றவாறு இருக்கும். எப்படியும், $a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$.

a, b-க்குப் பதிலாக a_1, b_1-ஐ முறையே வைத்து மேற்கண்ட விவாதத்தை நிகழ்த்தினால் I_1-ஐவிடச் சிறிய உள் இடைவெளியாக I_2 கிடைக்கும். I_2 ஆனது I_1-ன் ஒரு பாதியாகவும், I_2-ல் S-ன் முடிவில்லாத அநேக பல புள்ளிகள் இருக்குமாறும், I_2-ன் முனைகள் $a_1 \leqq a_2 < b_1 \leqq b_2$ என்றவாறும் இருக்கிறது.

இச்செய்கையை முடிவில்லாமல் தொடர்ந்தால், நமக்கு "உள் இடைவெளிகளின் ஒழுங்கு வரிசைக் கூடு" (nested sequence of sub-intervals) கிடைக்கின்றது. இவற்றில் ஒன்றின் நீளம் முந்தியதைவிடப் பாதியாகவும்

$$I_n = \{x \mid a_n \leqq x \leqq b_n\},\ n = 1, 2, 3, \ldots \text{ என்றவாறு}$$

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq b_{n-1} \leqq \ldots$$
$$\leqq b_2 \leqq b_1 \leqq b \qquad \ldots\ldots (I)$$

என்றவாறும்,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \text{ என்றவாறும் இருக்கிறது.}$$

இடது முனைப்புள்ளிகள் $a_1, a_2, \ldots$ என்பவை b-ஐ மேல் வரம்பாகக் கொண்ட ஓரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை. ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கும் பண்புப்படி, $\{a_n\}$ ஆனது அதன் l.u.b.ஐ எல்லையாகக் கொண்டு ஒருங்குகிறது. இந்த l.u.b.-ஐ c என்க.

$$\therefore \quad c = \lim_{n\to\infty} a_n = \text{l.u.b. } \{a_1, a_2, \ldots\}$$

இதுபோல், வலது முனைப்புள்ளிகள் $b_1, b_2, \ldots$ என்பவை a-ஐக் கீழ்வரம்பாகக் கொண்ட ஓரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு

வரிசை. இந்த ஓழுங்கு வரிசை அதன் g.l.b.-க்கு ஒருங்குகிறது. இதனை c' என்க.

$$\therefore \quad c' = \lim_{n\to\infty} b_n = \text{g.l.b. } \{b_1, b_2, \ldots\}.$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon>0$-க்கு,

$$|a_n - c| < \frac{\epsilon}{3}, \; n \geqq N_1$$

$$|b_n - c'| < \frac{\epsilon}{3}, \; n \geqq N_2$$

$$|a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{3}, \; n \geqq N_3$$

என்றவாறு N_1, N_2, N_3 என்ற நேர் முழு எண்களைக் காணலாம்.

$N = \max(N_1, N_2, N_3)$ என்றால்

$n \geqq N$-க்கு,

$$|c - c'| = |c - a_n + a_n - b_n + b_n - c'|$$

$$\leqq |c - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - c'|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

$\therefore \quad c = c'$

$\therefore \quad a_n \leqq c = c' \leqq b_n. \quad n = 1, 2, 3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad$ (II)

$\therefore$ n ஆனது ∞-ஐ அணுக,

கூடு இடைவெளிகள் c-க்குச் சுருங்குகின்றன.

இன்னும் நிறுவவேண்டியது

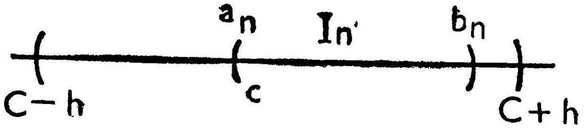
c ஆனது S-ன் திரட்சிப்புள்ளி என்று நிறுவ வேண்டியது. அதாவது c-ன் ஒவ்வொரு அண்மையிலும் S-ன் அநேக பல புள்ளிகள் இருக்கின்றன என்று நிறுவ வேண்டும்.

c-ன் யாதாமொரு அண்மை $(C-h, C+h)$ என்ற திறந்த இடைவெளி ஆகட்டும்.

n-ன் போதிய பெரிய மதிப்புகளுக்கு, I_n-ன் நீளம் $<h$,

ஏனெனில் $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) < h$ ...... (III)

அதாவது, $2^n > \frac{b-a}{h}$ என்பதற்கு ...... (IV)



படம் 39

(IV)-ஐ உறுதிப்படுத்தும் ஒரு முழு எண் n-ஐ எடுத்துக் கொள்க.

$$\left.\begin{array}{l} C-h \leqq b_n - h < a_n \\ C+h \geqq a_n + h > b_n \end{array}\right\} \text{(III), (II)-ஐப் பயன்படுத்தி.}$$

இடைவெளிகளின் அமைப்பினுல், ஒவ்வொரு உள்வெளி I, I_2...ம் S-ன் முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள அநேக பல புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கிறது.

∴ c-ஆனது S-ன் திரட்சிப் புள்ளி.

(I), (II)-லிருந்து, c-ஆனது I-ல் இருக்கிறது என்பது தெளிவு.

குறிப்பு

மேற்கண்ட தேற்றத்தில் இடைவெளிக் கூடு தேற்றத்தையும் நிறுவியுள்ளோம்.

கீழ்க்கண்ட கணக்குகள் (16)-ம், (17)-ம் ஹூர்விட்ஸ் (A. Huruitz) என்ற ஜெர்மானியக் கணிதப் புலவரால் ஆக்கப்பட்டன.

(16) $a^n = 2^n \left(x^{1/2} - 1\right)$

$$b^n = 2^n \left(1 - \frac{1}{x^{1/2^n}}\right)$$

என்றால், $\lim a_n = \lim b_n$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$\alpha_n = x^{1/2n}$ என்க.

$$\therefore \quad a_n = 2^n(\alpha_n - 1), \; b_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

இரு செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள்

நிகழ்ச்சி I. $x > 1, x_n > 1$ என்க.

$(\alpha_n + 1)(\alpha_n - 1) = \alpha^2_n - 1 = \alpha_{n-1} - 1.$

[ஏனெனில் $\alpha_n = x^{1/2n} \quad \therefore \quad \alpha^2_n = x^{2/2n} = x^{(1/2)n-1} = \alpha_n - 1.$]

$\because \quad \alpha_n > 1, \quad \therefore \quad (1+1)(\alpha_n - 1) < \alpha_{n-1} - 1.$

$2(\alpha_n - 1) < \alpha_{n-1} - 1$

$\therefore \quad 2^{n-1}[2(\alpha_n - 1)] < 2^{n-1}(\alpha_{n-1} - 1)$

$2^n(\alpha_n - 1) < 2^{n-1}(\alpha_{n-1} - 1)$

$\therefore \quad a_n < a_n - 1$

$\therefore \quad \{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை.

இது $0 < x \leqq 1$-க்கும் உண்மை.

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \therefore \quad x > 1 \;\rightarrow\; x^{\frac{1}{2}n} < x^{\frac{1}{2}n-1} \;\rightarrow \alpha_n < \alpha_{n-1}$$

முன்போல், $x > 1, \alpha_n > 1$-க்கு,

$$2(\alpha_n - 1) < \alpha_{n-1} - 1$$

$$\therefore \quad 2\frac{(\alpha_n - 1)}{\alpha_n} > \frac{\alpha_{n-1} - 1}{\alpha_{n-1}} \quad \because \quad 1 < \alpha_n < \alpha_{n-1}$$

$$\therefore \quad 2\left(1 - \frac{1}{\alpha_n}\right) > \left(1 - \frac{1}{a_{n-1}}\right)$$

$$\therefore \quad 2^n\left(1 - \frac{1}{\alpha_n}\right) > 2^{n-1}\left(1 - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)$$

$$b_n > b_{n-1}$$

∴ $\{b_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை. இது $0<x\leqq 1$-க்கும் உண்மை.

மேலும், $\alpha_n \gtrless 1$,

$$\alpha_n - 1 \leqq \alpha_n(\alpha_n - 1)$$

$$\therefore \quad 1 - \frac{1}{\alpha_n} \leqq \alpha_n - 1$$

$$\therefore \quad 2^n\left(1 - \frac{1}{\alpha_n}\right) \leqq 2^n(\alpha_n - 1)$$

$$\therefore \quad b_n \leqq a_n$$

$$\therefore \quad b_1 < b_2 < b_3 < \cdots b_n \leqq a_n < a_{n-1} < a_{n-2} < \cdots < a_2 < a_1$$

∴ $\{a_n\}$-ம் $\{b_n\}$-ம் வரம்புள்ளவை.

∴ $\{a_n\}$-ம், $\{b_n\}$-ம் வரம்புள்ள ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசைகள்.

∴ $\{a_n\} \to l$, $\{b_n\} \to l'$

ஆனல் $$\frac{b_n}{a_n} = \frac{2^n\left(1 - \frac{1}{\alpha_n}\right)}{2^n(\alpha_n - 1)}$$

$$= \frac{1}{\alpha_n}$$

$$\therefore \quad b_n\,\alpha_n = a_n$$

$$\therefore \quad \lim b_n \lim \alpha_n = \lim a_n.$$

இப்போது, $\lim \alpha_n$ α என்ருல்

$\alpha^2_n = \alpha_{n-1}$ என்பதிலிருந்து

$$\lim \alpha^2_n = \lim \alpha_{n-1}$$

$$\therefore \quad \alpha^2 = \alpha \qquad \therefore \quad \alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\therefore \quad \alpha = 1 \qquad \alpha \neq 0$$

$\therefore \quad (\lim b_n)\, 1 = \lim a_n$

$\therefore \quad \lim b_n = \lim a_n$

$l = l'$

குறிப்பு

(1) $\log x = \lim 2^n (x^{\frac{1}{2^n}} - 1) = \lim 2^n \left(1 - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2^n}}}\right)$

என்று மடக்கையை வரையறுப்பதும் உண்டு.

(2) $\{x^{\frac{1}{2^n}}\}$ ஆனது $x<1$ என்றால் ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என்றும், $x>1$ என்றால் ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கும் வரிசை என்றும் நிறுவலாம். மேலும் $\{x^{\frac{1}{2^n}}\}$ வரம்புள்ளது.

$x_n = x^{\frac{1}{2^n}}$ என்றால், $x^2_{n+1} = x_n$

$\therefore \quad \lim x_n = g$ என்றால், $g^2 = g \rightarrow g(g-1) = 0$

$\rightarrow g \neq 0,\ g = 1$

$\therefore \quad \{x^{\frac{1}{2^n}}\} \rightarrow 1$

(17) $x_0 = x, \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+\sqrt{1+x^2_n}}$ என்றால்,

$x<0$-க்கு $\{x_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என்றும் $x>0$-க்கு $\{x_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை என்றும் நிறுவுக.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ என்றும் நிறுவுக.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+\sqrt{1+x^2_n}}$$

$n=0$-க்கு $\quad x_1 = \dfrac{x_0}{1+\sqrt{1+x^2_0}}$

$$x_1 = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$x<0$ என்றால் $x = -h$, $x>0$ என்க.

$\therefore \quad x_1 = \dfrac{-h}{1+\sqrt{1+h^2}} > -h = x$

$\therefore \quad x_1 > x$

அதாவது $x < x_1$

இதுபோல் $x < x_1 < x_2 < \cdots$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

$\therefore \quad x < 0$-க்கு $\{x_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை. 0 என்பது இதன் ஒரு மேல் வரம்பு. ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கும் பண்பினுல் $\{x_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

இப்போது $\underline{x > 0}$ என்க.

$$1 < 1 + \sqrt{1+x^2}$$

$\because \quad x > 0, \therefore x < x\,(1 + \sqrt{1+x^2})$

$$\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} < x$$

(அதாவது) $x_1 < x$ இதுபோல் $\frac{1}{2} < x_1 \ldots$

$\therefore \quad x > x_1 > x_2 > \ldots .$

$\therefore \quad x > 0$-க்கு $\{x_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கும் வரிசை. இதன் ஒரு கீழ்வரம்பு 0.

ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் ஒருங்கும் பண்பினுல், $\{x_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\{x_n\} \to g$ என்க.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+\sqrt{1+x_n^2}} \to g = \frac{g}{1+\sqrt{1+g^2}}$$

$$\to g\{1+\sqrt{1+g^2}\} = g$$

$$\to g + g\sqrt{1+g^2} = g$$

$$\to g\sqrt{1+g^2} = 0$$

$$\to g = 0$$

$\therefore \quad x \gtrless 0$-க்கு $\{x_n\} \to 0$

(18) $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ என்றால், $\{a_n\}$-ன் தன்மை என்ன?

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+p)}\right]$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^p}}{1 - \frac{1}{(n+1)}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^p}\right]$$

$$< \frac{1}{n(n!)} < \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad |a_{n+p} - a_n| < \epsilon, \; n \geqq n_0, \; n_0 > \frac{1}{\epsilon}$$

$\therefore$ கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதியின்படி, $\{a_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$$

என்றால் $\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை என்றும், $\{b_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என்றும் நிறுவுக.

மேலும் $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ என்றும் காண்பிக்க.

விடை

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n$$

$$= \frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \therefore a_{n+1} < a_n$$

$\therefore$ $\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை.

அதேபோல் $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n$

$$= \frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \quad \therefore \quad b_{n+1} > b_n$$

$\therefore$ $\{b_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

இப்போது, $\frac{1}{n} > \log(n+1) - \log n$

$n=1, \quad 1 > \log 2 - \log 1$

$n=2, \quad \frac{1}{2} > \log 3 - \log 2$

$n=3, \quad \frac{1}{3} > \log 4 - \log 3$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$n=n, \quad \frac{1}{n} > \log(n+1) - \log n$

$$\therefore \quad 1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} > \log\ (n+1)-\log\ 1 = \log(n+1) > \log\ n$$

$$\therefore \quad 1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \log n > 0$$

$$\therefore \quad a_n > 0$$

$\{a_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை யாதலால், $\{a_n\} \to \gamma$, $\gamma > 0$. $a_1 = 1$ ஆனதால், $\gamma < 1$.

மேலும் $a_n - b_n = \dfrac{1}{n}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma$$

இந்த γ-வைத்தான் ஆய்லரின் மாறிலி எண் (Euler's Constant) என்பது.

மேலும் $b_2 = 1 - \log 2 > 0{\cdot}3$. $\therefore \ \gamma > 0{\cdot}3$

$\therefore \ 0{\cdot}3 < \gamma < 1$.)

(2) $a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n), \dfrac{2}{b_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$ என்றால் $\{a_n\}$-ம், $\{b_n\}$-ம் ஒரே எல்லைக்கு ஒருங்குவன என நிறுவுக.

(3) $\{a_n\} \to 0 \ \longleftrightarrow \ \{\,|a_n|\,\} \to 0$ எனக் காண்பிக்க.

(4) ஒவ்வொரு மெய்யெண் r-க்கும், r-க்கு ஒருங்கும், விகிதமுறு எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஒரு ஒழுங்கு வரிசை இருக்கிறது என நிறுவுக.

(5) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{6(1+a_n)}{7+a_n}$ என்றால் $\{a_n\}$ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என நிறுவுக.

ஆனால் $a_1 = 3$ என்றால் $\{a_n\}$-ன் இயல்பு என்ன ?

(6) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, . . . என்ற ஒழுங்கு வரிசையின் எல்லை, $x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு என நிறுவுக.

(7) $a_n = \dfrac{3\cdot5\cdot7\ \ldots\ (2n+1)}{2\cdot5\cdot8\ \ldots\ (3n-1)}$ என்றால் $\{a_n\}\rightarrow0$ என நிறுவுக.

(8) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ என்றால் $\{a_n\}$ ஆனது வரம்புள்ளது என்றும், ஒருங்கும் ஒழுங்கு வரிசை என்றும் நிறுவுக.

(9) $a_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2n-1)}{4\cdot6\cdot8\ \ldots\ (2n+2)}$ என்றால் $\{a_n\}\rightarrow0$ என நிறுவுக.

(10) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{6}{1+a_n}$ என்றால் $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} a_n=2$ எனக் காண்பிக்க.

(11) $a_1>2,\ a_{n+1}=\dfrac{6}{1+a_n}$ என்றால் $\{a_n\}\rightarrow2$ என நிறுவுக.

(12) $|\ a\ |<1$ என்றால் $\{na^n\}\rightarrow0$ எனக் காண்பிக்க.

(13) $a_n = \dfrac{2\cdot5\ 8\ \ldots\ 3n-1}{1\cdot4\cdot7\ \ldots\ 3n-2}$ என்றால் $\{a_n\}\rightarrow\infty$ என நிறுவுக.

(14) k என்பது பகா எண்ணானால் $\sqrt{k},\ \sqrt{k\sqrt{k}},\ \sqrt{k\sqrt{k\sqrt{k}}}$ ... என்ற ஒழுங்கு வரிசை k-க்கு ஒருங்குகிறது என நிறுவுக.

(15) $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} a_n=a,\ \lim\limits_{n\rightarrow\infty} b_n=b$ என்றால்

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_2 b_{n-1} + a_1 b_n}{n} = ab$$

எனக் காண்பிக்க.

(16) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ என்பவை இரு வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசைகள் என்றால்,

(i) $\overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n \geqq \overline{\lim}\ (a_n+b_n)$

(ii) $\underline{\lim}\ a_n + \underline{\lim}\ b_n \leqslant \underline{\lim}\ (a_n+b_n)$

என நிறுவுக.

(17) டெடெகின்ட் தேற்றம் மூலம் e-ம், π-ம் விகிதமுறா எண்கள் என நிறுவுக.

4. முடிவில்லாத் தொடர்
(Infinite Series)

4·1. வரை இலக்கணம் 1

$\{a_n\} = a_1, \ a_2, \ldots, a_n, \ldots$ என்பது ஒரு முடிவில்லாத ஒழுங்கு வரிசையானுல், $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ என்பதை "முடிவில்லாத் தொடர்" (Infinite Series) என்கிறோம்.

குறியீடு

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ என்ற முடிவில்லாத் தொடரை $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்று குறியிடுவது வழக்கம்.

வரை இலக்கணம் 2

முடிவில்லாத் தொடரின் ஒருங்கல், விரிதல், அலேதல் தன்மைகள்.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 ,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 ,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

என்ற தொடர்ச்சியான அடுத்தடுத்த தொகைகளேக் காண்க. இப்போது $\{s_n\} = s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ என்ற புதிய முடிவில்லாத ஒழுங்கு வரிசை ஒருங்கினுல், $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது என்போம்.

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = s$ என்றால், s-ஐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$-ன் **தொகை (sum)** என்போம்.

ஆகையால், ஒரு ஒருங்கும் முடிவில்லாத் தொடரின் தொகை என்பது, ஒரு எல்லையே (limit), முடிவில்லாத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை, $a_1+a_2+\ldots+a_n$ ஆனது அணுகும் எல்லையாகும்.

$$\therefore \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1}^{n} a_n\right)$$

ஒழுங்கு வரிசை $\{s_n\}$ ஆனது விரிந்தால், முடிவில்லாத் தொடரும் விரிகின்றது என்போம்.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \text{ என்றால், } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty \text{ என்றால் } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$$

என்றும் கொள்ளுவோம்.

$\{s_n\}$ ஆனது முடிவுள்ளதாக அலைந்தால், $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$-ம் முடிவுள்ளதாக அலைகின்றது என்றும், $\{s_n\}$ ஆனது முடிவற்றதாக அலைந்தால் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$-ம் முடிவற்றதாக அலைகின்றது என்றும் கொள்ளுவோம்.

4·2. தொடருக்கான கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதி (Cauchy's General Principle of Convergence for Series)

தேற்றம் I

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது கொடுக்கப்பட்ட முடிவில்லாத் தொடர் என்றும், $s_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$ என்றும், ϵ என்பது கொடுக்கப்பட்ட யாதாமொரு நேர் எண் என்றும் கொண்டால், முடிவில்லாத் தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்குவதற்கு, கட்டாய, போதிய நிபந்தனையாவது. எல்லா நேர் முழு எண்கள் p-க்கு,

$n \geqq n_0 \rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \epsilon$ என்றவாறு நேர் முழு எண் n_0 இருக்கிறது என்பதாகும்.

நிறுவல் பாகம் 1—நிறுவ நிபந்தனை வேண்டியது

தற்கோள்: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ என்க. $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$

$\therefore \; n \geqq n_0 \rightarrow |s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ என்றவாறு யாதாமொரு சிறிய $\varepsilon > 0$-க்கு ஒத்த n_0 இருக்கிறது.

$\therefore$ p என்பது யாதாமொரு நேர் முழு எண் என்றால்,

$$s_{n+p} - s_n = s_{n+p} - s + s - s_n$$

$$|s_{n+p} - s_n| \leqq |s_{n+p} - s| + |s - s_n|$$

$$\leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore$ நிபந்தனை வேண்டியது.

பாகம் 2—நிறுவ நிபந்தனை போதியது

தற்கோள்: $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, $n \geqq n_0$, எல்லா நேர் முழு எண்கள் p-க்கும் என்க.

$\therefore \; |s_{n_0+p} - s_{n_0}| < \varepsilon$, எல்லா நேர் முழு எண்கள் p-க்கும்

(அதாவது) $s_{n_0} - \varepsilon < s_{n_0+p} < s_{n_0} + \epsilon$, எல்லா நேர்முழு எண்கள் p-க்கும்,

$\therefore$ எல்லா p-க்கும், $\{s_{n_0+p}\}$ ஆனது வரம்புள்ளது.

$$\therefore \; s_{n_0} - \varepsilon \leqq \underline{\lim}\, s_{n_0+p} \leqq \overline{\lim}\, s_{n_0+p} \leqq s_{n_0} + \varepsilon$$

$$\therefore \; 0 \leqq \overline{\lim}\, s_{n_0+p} - \underline{\lim}\, s_{n_0+p} \leqq (s_{n_0} + \varepsilon) - (s_{n_0} - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

$\therefore \; \lim s_{n_0+p} = \underline{\lim}\, s_{n_0+p}$ $\because$ ϵ ஆனது யாதாமொரு சிறிய எண்.

$\therefore \; \lim s_{n_0+p} = s$ $\{s_{n_0+p}\}$ ஆனது வரம்புள்ளதாகையால்.

s ஆனது முடிவுள்ளது. $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\therefore$ தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

குறிப்பு

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$-க்குப் "பகுதித் தொகை" (partial sum) என்று பெயர்.

$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} = s_{n+p} - s_n$-க்குப் "பகுதி மீதி" (partial remainder) என்றும் பெயர். இப்பகுதி மீதியை pR_n என்றோ R_{nip} என்றோ குறியிடுவர்.

இதனால் மேற்கண்ட தேற்றத்தின் நிபந்தனையை

$n \geq n_0 \rightarrow |pR_n| < \epsilon$ அல்லது $|R_{nip}| < \epsilon$ என்று எழுதலாம்.

$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ மு. வ. (*ad infinitum* முடிவிலி வரை) என்பதை "*n* உறுப்புகளுக்குப்பின் மீதி" என்பர்.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ என்றால் $s = s_n + R_n$

தேற்றம் 2

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்க வேண்டுமானால்

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ என்பது கட்டாய நிபந்தனை.

ஆனால் இது போதிய நிபந்தனை அல்ல.

நிறுவல் - பாகம் 1

கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதியில், அதாவது, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்குவதற்குக் கட்டாய நிபந்தனையான $n \geq n_0 \rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \epsilon$, எல்லா p-க்கும், என்பதில் $p=1$ என்று எழுதினால்,

$$|s_{n+1} - s_n| < \epsilon \text{ என்பது கிடைக்கும்.}$$

அதாவது $|(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) - (a_1 + \ldots + a_n)|$

$$= |a_{n+1}| < \epsilon. \quad \therefore \; a_n \rightarrow 0$$

இப்பாகத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறும் நிறுவலாம்.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ என்றால் $s_n \to s$. $\therefore\ s_{n-1} \to s$

$\therefore\ s_n - s_{n-1} \to 0$. அதாவது $(a_1+a_2+\ldots+a_n)$
$-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}) \to 0$

அதாவது, $a_n \to 0$.

பாகம் 2

இந்நிபந்தனை போதியதல்ல எனக் காண்பிக்க, ஒரு எதிர் உதாரணத்தைக் (counter example) கொடுத்தால் போதும்.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்பதை எடுத்துக் கொள்க.

இங்கே $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

$p=n$ என்றால் $s_{n+p} = s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$+ \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

$\therefore\ |s_{n+p} - s_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \right|$ (n உறுப்புகள்வரை)

$> \left| \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} \right| = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

$|s_{n+p} - s_n| > \frac{1}{2}, (p=n)$

இப்போது $\epsilon < \frac{1}{2}$ என்றவாறு ϵ-ஐ எடுத்துக் கொண்டால்

$|s_{n+p} - s_n| > \epsilon$ கிடைக்கிறது.

இது கோஷியின் ஒருங்கல் விதிக்குப் புறம்பானது.

ஆனால் $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} > 0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ என்றால் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்கவேண்டும்

என்பதில்லை. அதாவது $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்கலாம் ; ஒருங்காமலும் இருக்கலாம்.

இதனால் பெறப்படுவது : $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ என்றால் நிச்சயமாக $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்காது.

4·3. தேற்றம் 1—நேர் உறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் (Positive termed Infinite Series)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்ற முடிவில்லாத் தொடரின் உறுப்புகள் எல்லாமே நேர் என்றால் இந்தத் தொடர் ஒரு முடிவுள்ள எல்லைக்கு ஒருங்குகிறது, அல்லது $+\infty$-க்கு விரிகிறது.

நிறுவல்

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

என்ற ஒழுங்கு வரிசையை அமைக்க,

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ என்பவை எல்லாமே நேர் ஆனதால்

$$s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < \ldots$$

அதாவது $\{s_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் வரிசையாகும்.

$\{s_n\}$ ஆனது வரம்புள்ளதானால்

அதாவது $s_n < K$, $K > 0$ என்றால், $\{s_n\}$ ஆனது ஒரு முடிவுள்ள நேர் எல்லைக்கு ஒருங்கும். s என்பது $\{s_n\}$-ன் l.u.b. என்றால் $\{s_n\} \to s$. $K > s$ என்றால் $\{s_n\} \to s < K$.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$-ம் அதே எல்லைக்கு ஒருங்கும்.

ஆனால் $\{s_n\}$-க்கு வரம்பு இல்லை என்றால்,

$\{s_n\} \to +\infty \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$-ம் $+\infty$ க்கு விரிகிறது.

குறிப்பு

நேர் உறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் அலையாது. ஏன்?

தேற்றம் 2

எல்லா உறுப்புகளும் நேர் ஆக உடைய முடிவில்லாத் தொடர் ஒருங்குமானால், இத்தொடரில் உள்ள உறுப்புகளை நம் விருப்பம்போல் எந்த வரிசையில் எழுதினாலும், கிடைக்கும் தொடர் அதே தொகைக்கு ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ என்பது கொடுக்கப் பட்ட முடிவில்லாத் தொடர் என்க. உறுப்புகளின் வரிசையை மாற்றியமைக்க ஒரு புதிய தொடர் கிடைக்கின்றது.

புதிய தொடரின் உறுப்புகளும், பழைய தொடர் (I)-ன் உறுப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்றுன ஒத்தியையில் இருக்குமாறு வரிசை மாற்றம் அமைய வேண்டும். ஒரு தொடரில் காணப் படும் ஒரு உறுப்பு, மற்ற தொடரில் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் அமைய வேண்டும்.

வழக்கம்போல், $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \ldots$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots$ என்ற ஒழுங்கு வரிசையை அமைக்கவும்.

$\{s_n\}$ ஆனது மேல் வரம்புள்ள ஓரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசையாகும். ஏனெனில் உறுப்புகள் a_n யாவும் நேர் ஆனவையே.

$\therefore$ $\{s_n\}$-ன் l u.b. ஆனது s என்றால்,

$\lim_{n \to \infty} s_n = s = \sum_{n=1} a_n$. இப்போது வரிசை மாற்றத்திற்குப் பிறகு கிடைத்த தொடர்

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n + \ldots \text{ என்க.}$$

($a'_n = a_m$ என்க)

முன்போல், $s'_1 = a'_1$, $s'_2 = a'_1 + a'_2, \ldots, s'_n = a'_1 + \ldots + a'_n$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots,$ என்ற ஒழுங்கு வரிசையை அமைக்கவும்.

$a'_1, a'_2, \ldots a'_n, \ldots$ என்பன யாவும் நேர் எண்களாதலால் $\{s_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசையாகும்.

$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ ன் l.u.b. ஆனது s.

$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$-ம் வரிசை மாற்றப்பட்ட $a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$ என்பதால் a-க்களின் l.u.b.-ம் a'-க்களின் l.u.b.-ம் சமமே.

$\therefore\ a'_1, \ldots, a'_n, \ldots$ ன் l.u.b. ஆனது s.

$\therefore\ \{s_n\} \to s$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = s.$$

குறிப்பு

(1) இதேபோல், எல்லா உறுப்புகளும் நேரான முடிவில்லாத் தொடர் $+\infty$-க்கு விரிந்தால், இத்தொடரின் உறுப்புகளை வரிசை மாற்றப்பட எத்தொடரும் $+\infty$-க்கு விரியும்.

(2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ என்ற நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் ஒருங்குமானுல்,

(i) முதலிலிருந்து முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளை அகற்றியோ, அல்லது

(ii) முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளை 0-விஞலோ அல்லது வேறெந்த உறுப்புகளிஞலோ பிரதியிட்டாலோ அல்லது

(iii) சில உறுப்புகளின் குறிகளை மாற்றிஞலோ கிடைக்கும் புதிய தொடரும் ஒருங்கும் தொடரே. இந்த உண்மையை கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதியைக் கொண்டு நிறுவலாம்.

4·4. முடிவில்லாத பெருக்குத் தொடர் (Infinite Geometric Series) ஒரு முக்கியமான முடிவு

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n + \ldots \text{(மு. வ.)}$$

என்ற பெருக்குத் தொடரை எடுத்துக் கொள்க.

வழக்கம்போல், $1, 1+r, 1+r+r^2, \ldots, 1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}; \ldots$ என்ற ஒழுங்கு வரிசையை அமைக்க.

$\{s_n\}$ என்பதில் $s_n = 1+r+\ldots+r^{n-1}$.

எழக் கூடிய பல செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள்: கீழ்க்காணும் விவாதத்தில் 3·10 கணக்கு (1) ஆனது பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$\{s_n\}$-ஐ ஒட்டியதுதான் $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$-ன் நடத்தை.

$$s_n = 1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r}$$

(i) $\underline{-1<r<1}$ $\quad \therefore r^n \to 0$

$$\therefore \lim s_n = \frac{1}{1-r}\{1-\lim r^n\} = \frac{1}{1-r}\{1\} = \frac{1}{1-r}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}.$$

(ii) $\underline{r=1}$ $\quad s_n = n$

$$\lim s_n = +\infty \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = +\infty$$

(iii) $\underline{r>1}$ $s_n > n$ $\quad \therefore \lim s_n = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = +\infty$$

(iv) $\underline{r=-1}$ $\quad n$ ஒற்றையானால், $s_n = 1$

n இரட்டையானால், $s_n = 0$.

$\therefore$ $\{s_n\}$ ஆனது முடிவுள்ளதாய் அலைகிறது.

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$-ம் முடிவுள்ளதாய் அலைகிறது.

(v) $r<-1$ $\{s_n\}$ ஆனது முடிவில்லாமல் அலைகிறது.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$-ம் முடிவில்லாமல் அலைகிறது.

சுருக்கமாக,

$-1<r<1$ என்றால், முடிவில்லாத் தொடர் $1+r+r^2+\ldots$ மு.வ. ஆனது ஒருங்குகிறது;

$r\geq 1$ என்றால் $1+r+r^2+\ldots$ மு.வ. ஆனது $+\infty$-க்கு விரிகிறது.

இது ஒரு மிக முக்கியமான முடிவு.

4·5. ஒருங்கும் தொடர்களுக்கான சில விதிகள்

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ என்பவை ஒருங்கும் தொடர்கள் என்க.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ என்றால், $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ ஆனது $a+b$-க்கு ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

என்றால் s_n+t_n ஆனது $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$-ன் n-ன் பகுதித் தொகை.

$$s_n\to s,\quad t_n\to t \to s_n+t_n\to s+t.$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ ஆனது $(s+t)$-க்கு ஒருங்குகிறது.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=t$, $\to \sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=s-t$

இதன் நிறுவல், மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்படுகிறது.

(3) k என்பது ஒரு மாறிலியானுல் (Constant), $\sum_{n=1}^{\infty} k\, a_n$ ஆனது ka-க்கு ஒருங்குகிறது.

இதன் நிறுவலும் மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்படுகிறது.

4·6 நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடரின் ஒருங்கலுக்கான சோதனைகள் (Criteria for Convergence of Series of Positive Terms)

சோதனை 1. நேரடி ஒப்பீட்டுச் சோதனை (Direct Comparison Test).

(i) $a_1+a_2+ \;...\; +a_n+ \;...$ மு.வ. என்பது சோதனைக்குட்பட்ட முடிவில்லாத் தொடர் என்றும், $b_1+b_2+ \;...\; +b_n+ \;...$ மு.வ. என்பது நமக்குத் தெரிந்த ஒருங்கும் முடிவில்லாத் தொடர் என்றும், k என்பது நேர் மாறிலி என்றும் கொள்க.

எல்லா n-க்கும் $a_n \leqq kb_n$ என்ருல் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஆனது b-க்கு ஒருங்குகிறது என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

$b_1+b_2+ \;...\; + b_n=t_n$ என்றும், $a_1+a_2+ \;...\; +a_n=s_n$ என்றும் கொள்க.

$$\lim_{n\to\infty} t_n=b.$$

$\therefore\;\; t_n<b.$ மேலும் $a_n \leqq kb_n.\;\; \forall_n$ என்பதால்

$s_n \leqq kt_n.$

$\therefore\;\; s_n \leqq kt_n<kb.$

$\therefore\;\; \{s_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை; மேல் வரம்புள்ளது.

$\therefore$ $\{s_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

அதாவது $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது சோதனைக்குட்பட்ட முடிவில்லாத் தொடர் என்றும், $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ஆனது நமக்குத் தெரிந்த விரியும் முடிவில்லாத் தொடர் என்றும், k என்பது நேர் மாறிலி என்றும் கொள்க.

எல்லா n-க்கும் $a_n \geqq kd_n$ என்றால், $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது விரிகிறது.

நிறுவல்

$d_1+d_2+\ldots+d_n=u_n$ என்றும், $a_1+a_2+\ldots+a_n=s_n$ என்றும் கொள்க.

$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ விரிகின்றதென்றால், $\sum_{n=1}^{\infty} d_n=+\infty$.

அதாவது G என்பது நம் விருப்பத்திற்கிணங்கிய மிகப் பெரிய எண் என்றால்,

$$u_n > G$$

$$a_n \geqq kd_n \rightarrow s_n \geqq k\, u_n > kG$$

$$\therefore\ s_n \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n=+\infty$$

சோதனை 2. "எல்லைகளால் ஒப்பிட்டுச் சோதனை" (Comparison of Limits)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ என்பவை இரு முடிவில்லா நேருறுப்புத்

தொடர்களில் n ஆனது ∞-ஐ அணுக, $\frac{a_n}{b_n}$ ஆனது ஒரு முடிவுள்ள பூச்சியமற்ற எல்லைக்கு ஒருங்கினால்

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஆனது ஒருங்கினால், $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$-ம் ஒருங்கும்.

$\sum_{n=1} b_n$ ஆனது விரிந்தால், $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$-ம் விரியும்.

(இது ஒரு முக்கியமான சோதனை.)

நிறுவல்

$\frac{a_n}{b_n} \to l \, (\neq 0)$ என்க.

$\therefore \quad l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon, \; n \geq m.$

$a_n > b_n \; (l - \epsilon)$

$\therefore \quad \sum b_n$ ஆனது விரிந்தால் $\sum a_n$-ம் விரியும். (சோதனை 1)

மேலும் $a_n < b_n \, (l + \epsilon)$

$\therefore \quad \sum b_n$ ஆனது ஒருங்கினால், $\sum a_n$-ம் ஒருங்கும். (சோதனை 1)

அதாவது $\sum u_n$-ம் $\sum v_n$-ம் ஒன்றாக ஒருங்குகின்றன, அல்லது விரிகின்றன.

குறிப்பு

$\sum a_n$ என்பது எந்த முடிவில்லாத் தொடராகவேனும் இருக்கலாம். l ஆனது குறையெண்ணாக இருப்பினும் சோதனையின் முடிவு மாறாது.

சோதனை 3

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்ற நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடரில்

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ என்றால்,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது நிச்சயமாக விரிகின்றது. (பார்க்க: 4·2, தேற்றம் 2)

மேற்கண்ட முதலிரு சோதனைகளைப் பயன்படுத்த வேண்டுமானால் ஒருங்கும் தொடர்களில் சில விரியும் தொடர்களில் சில நமக்குத் தெரிந்திருக்க வேண்டும். ஏற்கனவேயே முடிவில்லாப் பெருக்குத் தொடரைப் பற்றி அறிந்து கொண்டோம். இப்பெருக்குத் தொடரின் பொது விகிதம் r ஆனது $-1<r<1$ என்றால் மட்டுமே பெருக்குத் தொடர் ஒருங்குகிறது என்று கண்டோம். இது ஒரு முக்கியமான ஒப்பீட்டுக்குரிய தொடர்.

மற்றொரு முக்கியமான தொடர் வருமாறு :

4·6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$-ஐ ஆய்க.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots \text{(மு.வ.)}$$

நிகழ்வு 1. $\underline{p>1}$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{1}{1^p}=1$$

$$\because \quad p>1, \frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p} \quad \therefore \frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}}$$

இதுபோல்,

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{4}{4^p}=\frac{1}{4^{p-1}}=\frac{1}{2^{2(p-1)}}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$

$$\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\ldots+\frac{1}{15^p}<\frac{8}{8^p}=\frac{1}{8^{p-1}}=\frac{1}{2^{3(p-1)}}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots \text{மு. வ.}$$

$$<1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\ldots \text{மு. வ.}$$

ஆனால் வலது புறத்தில் உள்ள தொடர் $\frac{1}{2^{p-1}}$-ஐப் பொது விகிதமாகக் கொண்ட முடிவில்லாத பெருக்குத் தொடர்.

$p>1$ என்பதால், $\frac{1}{2^{p-1}}<1$

1-ஐவிடச் சிறிய பொது விகிதமுடைய பெருக்குத் தொடர் ஒருங்குகிறது என்று ஏற்கனவே நாம் அறிந்தபடி, மேற்கண்ட பெருக்குத் தொடரும் ஒருங்குகிறது.

4·5 சோதனை (1)ன்படி $\frac{1}{1^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$ மு. வ. ஒருங்குகிறது.

நிகழ்வு 2. $p=1$ என்க.

அப்போது, கொடுக்கப்பட்ட தொடரானது

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$ என்றாகும்.

இந்தத் தொடரை

$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\ \ldots$ என்றெழுதலாம்.

அடைப்புகளில் உள்ள உறுப்புகளினின்று கீழ்க்கண்ட சமனின்மைகளை உருவாக்கலாம்.

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ \ldots\ +\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

... ...

... ...

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}+\ \ldots>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ \ldots \text{ மு. வ.}$$

அதாவது $>\frac{1}{2}$ (1+1+ . . . மு. வ)

ஆனால் வலதுபுறத்துள்ள தொடர் $\frac{1}{2}(1+1+1+\ldots$ மு.வ.)-க்கு ஒத்த ஒழுங்கு வரிசை $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ ஆனது விரிகின்றதால்,

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n$ ஆனது விரிகின்றது.

சோதனை 1-ன்படி, $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ம் விரிகின்றது.

நிகழ்வு 3. $p<1$ என்க.

$\therefore\ \frac{1}{n^p}>\frac{1}{n}$; ஆனால் நிகழ்வு 2-ன்படி $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ஆனது விரிகின்றது.

$\therefore$ சோதனை 1-ன்படி $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ஆனது விரிகின்றது.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ஆனது

$p>1$-க்கு ஒருங்குகிறது
$p\leq 1$-க்கு விரிகிறது.

மேற்கண்ட சோதனைகளைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகளை ஆராய்வோம்.

4·7. கொடுக்கப்பட்ட தொடர்களின் ஒருங்கலை ஆய்க

(1) $\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots$ (மு. வ.)

பெரும்பாலும் இம்மாதிரியான எல்லா கணக்குகளிலும் n-ஆவது உறுப்பைக் கண்டுபிடித்தல் அவசியம். n-ஆவது உறுப்பை u_n என்க.

$$u_n=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

தொகுதியிலிருக்கும் n-ன் அடுக்கு 2. விகுதியிலிருக்கும் n-ன் அடுக்கு 3.

$\therefore\ \sum u_n$-ஐ $\sum\frac{1}{n}$ உடன் ஒப்பிடலாம்.

$v_n = \frac{1}{n}$ என்றால்,

$$\frac{u_n}{v_n} = \left[\frac{n(n+1)}{(n+2)\ (n+3)\ (n+4)}\right]^n$$

இப்போது, சோதனை 2-ஐப் பயன்படுத்த வேண்டின்,

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ -ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

தொகுதியின் n-ன் அடுக்கும், விகுதியின் n-ன் அடுக்கும் சமம். ஆதலால் முதலில் தொகுதியையும், விகுதியையும் n^3-ஆல் வகுக்க வேண்டும். அதாவது தொகுதியின் ஒவ்வொரு கோவையையும்; விகுதியின் ஒவ்வொரு கோவையையும் n-ஆல் வகுத்தால் போதுமானது.

$$\therefore \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{1\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{1\cdot 1\cdot 1} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ சோதனை (2)-ன்படி $\sum u_n$-ம், $\sum v_n$-ம் ஒரே தன்மையன.

ஆனால் 4·6-ன்படி $\sum \frac{1}{n}$ ஆனது விரிகின்றது.

$\therefore$ $\sum u_n$-ம் விரிகின்றது.

(2) $\frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{2^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+x^2} + \cdots$ (மு. வ)

(மெய்யான x-க்கு)

$$u_n = \frac{1}{n^2+x^2}$$

x ஆனது மெய்யானதால், $x^2 > 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{n^2+x^2} < \frac{1}{n^2}$$

$v_n = \frac{1}{n^2}$ என்றால் $\sum \frac{1}{n^2}$ ஆனது, 4·6-ன்படி ஒருங்குகிறது.

$\therefore$ சோதனை 1-ன்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

இதே கணக்கை, சோதனை 2-ஐப் பயன்படுத்தியும் செய்யலாம்.

(3) $\frac{2}{1^p} + \frac{3}{2^p} + \frac{4}{3^p} + \frac{5}{4^p} + \ldots$ மு. வ.

$u_n = \frac{n+1}{n^p}$ $\qquad v_n = \frac{1}{n^{p-1}}$ என்க.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+1}{n^p} \cdot n^{p-1}$$

$$= \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 + 0 = 1$$

$\sum u_n$-ம் $\sum v_n$-ம் ஒரே தன்மையன.

4·6-ல் உள்ளபடி, $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^{p-1}}$ ஆனது

$\begin{cases} p-1>1, \text{ அதாவது } p>2 \text{ என்றால், ஒருங்குகிறது} \\ p-1 \leqq 1, \text{ அதாவது } p \leqq 2 \text{ என்றால், விரிகிறது.} \end{cases}$

$\therefore$ $\sum u_n$ ம், $p>2$ என்றால் ஒருங்குகிறது.

$p \leqq 2$ என்றால் விரிகிறது.

(4) $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} + \ldots$ (மு. வ.)

$u_n = \frac{1}{(2n-1)^p}$

$v_n = \frac{1}{n^p}$ என்க.

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n^p}{(2n-1)^p}+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^p=\left(\frac{1}{2-(1/n)}\right)^p$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{2^p}\ (\neq 0)$$

$\sum v_n$ ஆனது

$p>1$-க்கு ஒருங்குகிறது

$p\leqq 1$-க்கு விரிகிறது.

$\therefore$ $\sum u_n$-ம்

$p>1$-க்கு ஒருங்குகிறது

$p\leqq 1$-க்கு விரிகிறது.

மற்ருெரு முறை

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$=\left(\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\ldots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right)-\frac{1}{2^p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\left(\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right)$$

ஆனல் அடைப்புக்களிலிருக்கும் முடிவற்ற தொடர் ஆனது

$\begin{cases} p>1\text{-க்கு ஒருங்குகிறது} \\ p\leqq 1\text{-க்கு விரிகிறது.}\end{cases}$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொடரும், $p>1$க்கு ஒருங்கினல்

$p\leqq 1$-க்கு விரிகிறது.

(5) $1^p+2^p+3^p+4^p+5^p+\ldots$

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$=\frac{1}{1^{-p}}+\frac{1}{2^{-p}}+\frac{1}{3^{-p}}+\frac{1}{4^{-p}}+\ldots$$

$-p=k$ என்றால்

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$=\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

4·6-ன் படி தொடர் ஆனது $k>1$ என்றால் ஒருங்குகிறது

$k\leqq 1$ என்றால் விரிகிறது.

$k>1 \rightarrow -p>1 \rightarrow p<-1$

$k\leqq 1 \rightarrow -p\leqq 1 \rightarrow p\geqq -1$

$\therefore$ $\sum n^p$ ஆனது

$p<-1$ என்றால் ஒருங்குகிறது

$p\geqq -1$ என்றால் விரிகிறது.

(6) $\sum\frac{1}{(1+n)^p\,(2+n)^q}$ $(p, q>0)$

$$u_n=\frac{1}{(1+n)^p\,(2+n)^q}$$

$$v_n=\frac{1}{n^{p+q}}$$

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{(1+n)^p(2+n)^q}\cdot n^{p+q}=\frac{1}{(1+n)^p\,(2+n)^q}\cdot n^p\,.\,n^q$$

$$=\left(\frac{n}{1+n}\right)^p\cdot\left(\frac{n}{2+n}\right)^q$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^p}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{n}+1\right)^q}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{(0+1)^p} \cdot \frac{1}{(0+1)^q}$$

$$= 1 \ (\neq 0)$$

சோதனைப்படி, $\sum u_n$-ம், $\sum v_n$-ம் ஒரே தன்மையன.

ஆனால், 4·6-ன்படி,

$\sum \frac{1}{n^{p+q}}$ ஆனது

$\begin{cases} p+q>1\text{-க்கு ஒருங்குகிறது} \\ p+q\leqq 1\text{-க்கு விரிகிறது} \end{cases}$

$\therefore \quad \sum u_n$-ம்

$\begin{cases} p+q>1\text{-க்கு ஒருங்குகிறது} \\ p+q\leqq 1\text{-க்கு விரிகிறது.} \end{cases}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)$

$$u_n = \sqrt{n^4+n}-n^2$$

$$= \sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}-n^2$$

$$= n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$

$$= n^2\left[1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^3}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n^3}\right)^2+\ldots-1\right]$$

$$= n^2\left[\frac{1}{2n^3}-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{(n^3)^2}+\ldots\right]$$

$$= \frac{n^2}{n^3}\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots\right]$$

$v_n = \frac{1}{n}$ என்க.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{2} \; (\neq 0)$$

4·6-ன்படி, $\sum \frac{1}{n}$ ஆனது விரிகின்றதால், $\sum u_n$-ம் விரிகின்றது.

(8) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(n+1) - n} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n+1} + \lim_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty + \infty = \infty \neq 0$$

$\therefore$ சோதனை 3-ன்படி $\sum u_n$ விரிகின்றது

மறுவிதம்

$$u^n = \sqrt{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \sqrt{n} = \sqrt{n}\left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right]$$

$$= \sqrt{n}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right]$$

$$= \sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \dots + 1\right]$$

$$= \sqrt{n}\left[2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots\right]$$

$v_n = \sqrt{n}$ என்க,

$$\frac{u_n}{v_n}=2+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=2\ (\neq 0)$$

ஆனால் $\sum v_n$ ஆனது விரிகின்றது

$\therefore\ \sum u_n$-ம் விரிகின்றது.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$

$$u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-n=n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-n$$

$$=n\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]=n\left[\left(1+\frac{1}{2n^2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^4}+\ldots\right)-1\right]$$

$$=n\left[\frac{1}{2n^2}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}\frac{1}{n^4}+\ldots\right]$$

$$=\frac{n}{n^2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{8n^2}+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{8n^2}+\ldots\right]$$

$v=\frac{1}{n}$ என்க.

$$\frac{u_n}{v_n}=\tfrac{1}{2}-\frac{1}{8n^2}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\tfrac{1}{2}\neq 0$$

ஆனால் $\sum v_n=\sum\frac{1}{n}$ ஆனது விரிகின்றது.

$\therefore\ \sum u_n$-ம் விரிகின்றது.

(10) $\sum (\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1})$

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1})\ (\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1})}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}$$

$$= \frac{(n^4+1)-(n^4-1)}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}+\sqrt{n^4\left(1-\frac{1}{n^4}\right)}} = \frac{2}{n^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}\right]}$$

$v_n = \frac{1}{n^2}$ என்க.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 2\ (\neq 0)$$

ஆனால் $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\therefore \sum u_n$-ம் ஒருங்குகிறது.

(11) $\frac{1}{\sqrt{2^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{3^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4^2-1}}+\ldots$ மு. வ.

$$\frac{1}{\sqrt{2^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{2^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{3^2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{4^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{4^2}} = \frac{1}{4}$$ முதலியன.

இவற்றை நிரல்வழிக் கூட்ட,

$$\frac{1}{\sqrt{2^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{3^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4^2-1}}+\ldots \text{மு. வ.}$$

$$> \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots \text{மு. வ.}$$

அதாவது $> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ மு. வ. -1.

ஆனால் $\sum\frac{1}{n}$ ஆனது விரிகிறது.

∴ சோதனை 1-ன்படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் விரிகிறது.

குறிப்பு

மேற்கண்ட கணக்குகளைப்போல், இந்தக் கணக்கையும், $v_n=\frac{1}{n}$ என்று வைத்து, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ -ஐக் கண்டுபிடித்துச் செய்யலாம்.

(12) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\ldots$ மு. வ.

$$u_n=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$v_n=\frac{1}{n}$$

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\ \frac{1}{(1+0)}=\frac{1}{e}\neq 0$$

ஆனால் $\sum \frac{1}{n}$ விரிகிறது; ஆதலால் $\sum u_n$-ம் விரிவது சரியே.

(13) $\sqrt{\frac{2n^2+3}{5n^3+7}}$ என்பதை n-ஆவது உறுப்பாகக் கொண்ட தொடர்

$u_n = \sqrt{\frac{2n^2+3}{5n^3+7}}$ என்றால், $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ என்க.

$$\frac{u_n}{v_n} = \sqrt{\frac{2n^2+3}{5n^3+7}} \cdot n = \sqrt{\frac{2n^3+3n}{5n+7}} = \sqrt{\frac{2+\frac{3}{n^2}}{5+\frac{7}{n^3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{\frac{2}{5}} \neq 0.$$

ஆனால் 4·6-ன்படி, $\sum v_n$ ஆனது விரிகின்றது.

$\therefore$ $\sum u_n$-ம் விரிகின்றது.

(14) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$-ஐ, n ஆவது உறுப்பாகக் கொண்ட தொடர்.

$\theta = \frac{1}{n}$ என்றால், n ஆனது ∞-ஐ அணுக, θ ஆனது 0-ஐ அணுகுகிறது.

$\therefore \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, அதாவது, $\sin\theta$-ம் 0-ஐ அணுகுகிறது.

$\therefore \theta \to 0 \to \sin\theta \to 0$

ஆனால் $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

அதாவது, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$

$\therefore u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right),\ v_n = \frac{1}{n}$ என்றால், $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \neq 0$

ஆனால் $\sum \frac{1}{n}$ ஆனது விரிகிறது

$\therefore \sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ம் விரிகிறது

15) $\sum \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$$u_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$n\to\infty \to \frac{1}{n}\to 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= 1 \neq 0 \quad \because \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{0} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \neq 0$$

ஆனால் $\sum \frac{1}{n}$ ஆனது விரிகிறது $\therefore \sum u_n$-ம் விரிகிறது.

(16) $\sum \frac{1}{n^{1+(1/n)}}$

$$u_n = \frac{1}{n^{1+(1/n)}}$$

$$v_n = \frac{1}{n} \text{ என்க.}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n^{1+(1/n)}} \cdot n$$

$$= \frac{1}{n^{1/n}}$$

3·10 கணக்கு (11)-ன் படி, $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} n^{1/n}} = 1 \neq 0$$

ஆனால் $\sum \frac{1}{n}$ ஆனது விரிகின்றதால், $\sum \frac{1}{n^{1+(1/n)}}$ ம் விரிகின்றது.

4·8. தேற்றம் 1

ஒரு முடிவில்லாத் தொடர் ஆனது ஒருங்குகிறது என்றால் இத்தொடரின் உறுப்புகளை, நம் விருப்பம் போல் உறுப்புகளின் வரிசையை மட்டும் மாற்றாமல், அடைப்புகளைப் புகுத்தினால் கிடைக்கும் தொடரானது கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் தொகைக்கே ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

கொடுக்கப்பட்ட ஒருங்கும் முடிவில்லாத தொடர்

$\sum u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ (மு.வ.) என்க.

$\sum u_n = s$ என்க.

$s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, \ldots, s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, (மு.வ.) என்றால்,

$\{s_n\} \to s$ என்பது உண்மை.

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ ல் அடைப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு புகுத்துக.

$$\sum u_n = (u_1 + \ldots + u_k) + (u_k + \ldots + u_m) + u_m + (u_{m+2} + u_{m+3})$$

$$+ (u_{m+4} + \ldots + u_r) + \ldots + (u_n + u_{n+1}) + (u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}) + \ldots$$ மு.வ. என்க

$v_1 = u_1 + \ldots + u_k, v_2 = u_{k+1} + \ldots + u_m, v_3 = u_{m+1}$

$v_4 = u_{m+2} + u_{m+3}, v_5 = u_{m+4} + \ldots + u_r, \ldots,$

$v_n = u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}, \cdots$ என்றால் நமக்குக் கிடைப்பது

$\sum v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \ldots$ மு.வ. என்ற தொடராகும்.

$s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots,$

$s_n = u_1 + \ldots + u_n, s_{n+1} = u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1}, \ldots$

$s_{n+p} = u_1 + \ldots + u_{n+p}, \ldots$ என்றால்,

கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதிப்படி, $\epsilon > 0$, $| s_{n+p} - s_n | < \frac{\varepsilon}{2}$. $n \geqq n_0$, p ஒரு முழு எண்.

$t_1 = v_1, t_2 = v_1 + v_2, \ldots, t_n = v_1 + \ldots + v_n, \ldots$ என்க.

$t_n = v_1 + \ldots + v_n = u_1 + \ldots + u_{n+p} = s_{n+p}$

$\therefore t_n - s = s_{n+p} - s$

$= (s_n - s) + (s_{n+p} - s_n)$

$| t_n - s | \leqq | s_n - s | + | s_{n+p} - s_n |$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. [\{s_n\} \to s, \mid s_{n+p} - s_n \mid < \epsilon]$$

$$\therefore \{t\} \to s$$

$$\therefore \sum v_n \to s.$$

குறிப்பு

இத்தேற்றத்தின் மறுதலை சரியாகாது. இதற்கு எதிர் உதாரணம், இதோ : $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$ மு. வ. ஆன $0+0+0+\ldots$ மு.வ. ஆவதால், இத்தொடர் 0-க்கு ஒருங்குகிறது. இப்போது அடைப்புக் குறிகளை அப்படியே நீக்கிவிடு.

கிடைப்பது $1-1+1-1+1-1+\ldots$ மு.வ. ஆகும். இப்புதிய தொடர் 0-க்கும், 1-க்கும் இடையே அலைகிறது; அதாவது ஒருங்காது.

தேற்றம் 2

ஒருங்கும் அல்லது விரியும் முடிவில்லாத் தொடரின் ஆரம்பத்தில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள சில உறுப்புகளைத் நீக்கினாலோ அல்லது விருப்பம் போல் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையால் மாற்றினாலோ அத் தொடரின் தன்மை மாறாது.

நிறுவல்

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$= u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n + \ldots \text{(மு. வ.)}$$

என்க.

கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதிப்படி,

$$\mid pR_n \mid < \epsilon, \; n \geqq n_0$$

இந்த நிபந்தனையில், முதல் n_0 உறுப்புகளைப் பற்றி நமக்குத் தேவையில்லை. அப்படியானால் இந்த ஆரம்ப n_0 உறுப்புகளை நீக்கினாலென்ன, நம் விருப்பம் போல் மாற்றியமைத்தாலென்ன? எப்படியும்,

$\mid pR_n \mid < \epsilon, \; n \geqq n_0$ என்பது உண்மையே. ஆதலால் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் தன்மை மாறாது.

4·9. சோதனை 4 (ஒப்பீட்டுச் சோதனை)

$\sum u_n$, $\sum v_n$ என்ற இரு நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர்கள் என்க.

(1) $\sum v_n$ ஆனது ஒருங்குகிறதென்க.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$, $n \geqq n_0$ என்றால், $\sum v_n$ ஒருங்குகிறது.

(2) $\sum v_n$ ஆனது விரிகிறதென்க.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$, $n \geqq n_0$ என்றால், $\sum v_n$ விரிகிறது.

நிறுவல்

(1) $\sum v_n$ ஒருங்குகிறது, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ என்க.

4·8 தேற்றம் 2-ன்படி, நேருறுப்புத் தொடரின் ஆரம்பத்தில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளை நீக்குவதால் அத் தொடரின் தன்மை மாறாதென்பதால்,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ என்ற சமனின்மை எல்லா நேர் முழு n-க்கும் உண்மை எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \frac{u_2}{u_1} < \frac{v_2}{v_1}, \frac{u_3}{u_2} < \frac{v_3}{v_2}, \frac{u_4}{u_3} < \frac{v_4}{v_3}, \ldots$$

இப்போது

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

$$= u_1\left(1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} + \frac{u_4}{u_1} + \ldots\right)$$

$$= u_1\left(1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_4}{u_3} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \ldots\right)$$

$$< u_1\left(1 + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_4}{v_3} \cdot \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} + \ldots\right)$$

$$= \frac{u_1}{v_1}\left(v_1+v_2+v_3+v_4+\ \ldots\right)$$

$\frac{u_1}{v_1}$ என்பது மாறலி. மேலும், எடுத்துக்கொண்டபடி,

$\sum v_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\therefore$ சோதனை 1-ன்படி, $\sum u_n$-ம் ஒருங்குகிறது.

(2) $\sum v_n$ விரிகிறது, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ என்க.

அதாவது, $\frac{u_2}{u_1} > \frac{v_2}{v_1}$, $\frac{u_3}{u_2} > \frac{v_3}{v_2}$, . . .

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ \ldots$$

$$= u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_1}+\frac{u_4}{u_1}+\ \ldots\right)$$

$$= u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_4}{u_3}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\ \ldots\right)$$

$$> u_1\left(1+\frac{v_2}{v_1}+\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}+\frac{v_4}{v_3}\cdot\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}+\ \ldots\right)$$

$$= \frac{v_1}{u_1}\left(v_1+v_2+v_3+v_4+\ \ldots\right)$$

ஆனல் $\frac{u_1}{v_1}$ என்பது மாறிலி; $\sum v_n$ என்பது விரியும் தொடர் எனக் கொண்டோம். $\therefore$ சோதனை 1-ன்படி, $\sum u_n$-ம் விரிகிறது.

சோதனை 5. தலம்பேரின் விகித சோதனை (d'Alembert's Ratio Test).

$\sum u_n$ ஆனது நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ என்க.

$l<1$ என்றால், $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது

$l>1$ என்றால், $\sum u_n$ விரிகிறது.

நிறுவல்:

(i) $l<1$ என்க.

$l<\beta<1$ என்றவாறு β என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்க.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=l \text{ என்பதால்}$$

$$n\geqq n_0 \to \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\epsilon,\ \epsilon>0$$

அதாவது, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ஆனது l-லிருந்து நம் விருப்பத்திற்குரிய மிகச்சிறிய அளவு வேறுபடுகிற விகிதத்தில் n_0-ஐப் பெரியதாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore\ n\geqq n_0 \to \frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon=\beta$$

$$u_{n_0}>0$$

$$u_{n_0+1}<\beta\, u_{n_0}$$

$$u_{n_0+2}<\beta\, u_{n_0+1}<\beta\cdot\beta\, u_{n_0}=\beta^2 u_{n_0}$$

$$u_{n_0+3}<\beta\, u_{n_0+2}<\beta\beta^2 u_{n_0}=\beta^3 u_{n_0}$$

$$\therefore\ u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+u_{n_0+3}+\ldots$$

$$<u_{n_0}+\beta u_{n_0}+\beta^2 u_{n_0}+\beta^3 u_{n_0}+\ldots$$

$$=u_{n_0}(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\ldots)$$

u_{n_0} என்பது நேர் மாறிலி. அத்துடன் $1+\beta+\beta^2+\beta^3+\ldots$ மு. வ. என்பது, $\beta<1$ என்பதால், முடிவில்லாத ஒருங்கும் பெருக்குத் தொடர்.

$\therefore$ ஒப்பீட்டுச் சோதனை 1-ன்படி $\sum u_n$-ம் $n \geqq n_0$-க்கு ஒருங்கு கிறது.

(ii) $l > 1$ என்க.

$$\therefore \quad n \geqq n_0 \rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > \beta > 1$$

$$\therefore \quad u_{n_0+1} > \beta\, u_{n_0}, \quad u_{n_0+2} > \beta u_{n_0+1} > \beta^2 u_{n_0} \text{ முதலியன.}$$

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots > u_{n_0}(1 + \beta + \beta^2 + \ldots)$$

$u_{n_0} > 0$ என்பது மாறிலி. $\beta > 1$ என்பதால், $1 + \beta + \beta^2$ என்பது விரியும் தொடர். $\therefore$ ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்படி, $\sum u_n$ ஆனது $n \geqq n_0$-க்கு விரிகிறது.

கிளைத்தேற்றம் 1

β என்பது 1-ஐவிடச் சிறிய மாறிலி எண் என்றும், $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \beta$ என்றால், $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

கிளைத்தேற்றம் 2

$l = 1$ என்றால், நமக்கு ஒருங்கலைப் பற்றியோ, விரிதலைப் பற்றியோ செய்தி ஒன்றும் கிடைக்காது.

உதாரணமாக,

$$\sum u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ மு. வ. என்றால்,}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

ஏற்கனவேயே 4·6-ல் $\sum u_n$ ஆனது விரியும் தொடரெனக் கண்டோம்.

$$\sum v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \text{ மு. வ. என்றால்}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

ஏற்கனவேயே 4·6-ல் $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்கும் தொடரெனக் கண்டோம்.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ என்பது நமக்குத் திட்டவட்டமான செய்தி ஒன்றையும் தருவதில்லை.

இம்மாதிரி நிகழ்ச்சிகளில் வேறு ஏதாவது நமக்குத் தெரிந்த சோதனைகளைக் கருதுவது பயன்தரும்.

4·10. தலம்பேரின் விகித சோதனையை யொட்டிய கணக்குகள்

I. தரப்பட்டுள்ள தொடர்கள் ஒருங்குகின்றனவா என்று சோதனை செய்!

(1) $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots$ (மு. வ.)

$$u_n=\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$$

$$u_{n+1}=\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)\ (n+2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)\,(2n+3)}$$

$$\therefore\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{2n+3}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\tfrac{1}{2}<1$$

∴ தலம்பேரின் சோதனைப்படி, தொடர் ஒருங்குகிறது.

(2) $\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+2^3}+\ldots$ (மு.வ)

$$u_n=\frac{n}{1+2^n}$$

$$u_{n+1}=\frac{n+1}{1+2^{n+1}}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{1+2^{n+1}}\ \frac{1+2^n}{n}$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{1+2^n}{1+2^{n+1}}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{1}{2^n}+2}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=(1+0)\left(\frac{0+1}{0+2}\right)=\frac{1}{2}<1$ $\therefore$ தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(3) $\frac{10x}{1!}+\frac{10^2x^2}{2!}+\frac{10^3x^3}{3!}+\ldots$ மு. வ. (மெய்யெண் x)

$$u_n=\frac{10^n}{n!}x^n$$

$$u_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\ x^{n+1}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{10^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{10^nx^n}=\frac{10x}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$$

$\therefore$ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்கும்.

II. தரப்பட்டுள்ளனவற்றை n ஆவது உறுப்புகளாக உடைய முடிவில்லாத் தொடரைச் சோதிக்க:

(4) $\frac{3\cdot 6\cdot 9\ldots 3n}{4\cdot 7\cdot 10\ldots(3n+1)}\cdot\frac{2^n}{3n+2}$

$$u_n = \frac{3\cdot6\cdot9\ldots3n}{4\cdot7\cdot10\ldots(3n+1)}\;\frac{2^n}{3n+2}$$

$$u_{n+1} = \frac{3\cdot6\cdot9\ldots3n(3n+3)}{4\cdot7\cdot10\ldots(3n+1)(3n+4)}\;\frac{2^{n+1}}{3n+5}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+3}{3n+4}\cdot\frac{2^{n+1}}{3n+5}\cdot\frac{3n+2}{2^n}$$

$$= 2\frac{(3n+3)(3n+2)}{(3n+4)(3n+5)}$$

$$= 2\,\frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)}{\left(3+\frac{4}{n}\right)\left(3+\frac{5}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\cdot3\cdot3}{3\;3} = 2 > 1$$

$\therefore$ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரிகின்றது.

(5) $\frac{n!}{n^n}$

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\therefore u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1 \qquad \because e > 1$$

$\therefore$ தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(6) $3^n\,\frac{n!}{n^n}$

$$u_n = 3^n\frac{n!}{n^n}$$

$$u_{n+1} = 3^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n(n)!}$$

$$= \frac{3(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\, n^n$$

$$= 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{e} > 1 \qquad \because \quad 2 < e < 3$$

∴ $\sum u_n$ ஆனது, தலம்பேரின்படி விரிகிறது.

III. சோதிக்க:

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+4^n}}{\sqrt{1+5^n}}$

$$u_n = \frac{\sqrt{1+4^n}}{\sqrt{1+5^n}} \qquad \therefore \quad u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+4^{n+1}}}{\sqrt{1+5^{n+1}}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{1+4^{n+1}}{1+4^n} \cdot \frac{1+5^n}{1+5^{n+1}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{4^n}+4}{\frac{1}{4^n}+1} \cdot \frac{\frac{1}{5^n}+1}{\frac{1}{5^n}+5}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{4}{1}\cdot} = \sqrt{\frac{4}{5}} < 1$$

∴ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$

$$u_n=\frac{n^p}{n!} \qquad \therefore \quad u_{n+1}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^p}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=(1+0)^p\ .\ 0=0<1$$

$\therefore$ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

IV. **கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க:**

(9) $1^2x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\cdots$ மு. வ.

$u_n=n^2x^n$

$$u_{n+1}=(n+1)^2x^{n+1} \quad \therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2x^{n+1}}{n^2x^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2x$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2x$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) $x<1$ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(ii) $x>1$ தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

(iii) $x=1$ என்றால் தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$x=1$ என்றால் $u_n=n^2$

$$\lim_{n\to\infty} n^2=\infty\neq 0 \qquad \therefore \quad \sum u_n \text{ ஆனது விரிகிறது.}$$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} n^kx^n$

$u_n=n^kx^n$

$u_{n+1}=(n+1)^k\,x^{n+1}$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) $x<1$, தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(ii) $x>1$, தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

(iii) $x=1$ என்ருல் தலம்பேரிஞல் பயனில்லை.

$x = 1$ என்ருல்

$$u_n = n^k = \frac{1}{n^{-k}}$$

4·6-ன்படி, $\begin{cases} -k>1 \text{ அதாவது, } k<-1 \text{ என்ருல் } \sum u_n \text{ ஒருங்கும்} \\ -k \leqq 1, \text{ அதாவது } k \geqq -1 \text{ என்ருல் } \sum u_n \text{ விரியும்.} \end{cases}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^n$

$$u_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^n, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\, x^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\, x^{n+1} \quad \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{x^n}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)\cdot n}} \cdot x$$

$$= \sqrt{\frac{\left[1+\frac{1}{n}\right]\left[1+\frac{1}{n}\right]}{\left(1+\frac{2}{n}\cdot 1\right)}} \cdot x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

தலம்பேரின்படி,

$x<1$ என்ருல் $\sum u_n$ ஒருங்கும்.

$x > 1$ என்றால் $\sum u_n$ விரியும்.

$x = 1$ என்றால் தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$x = 1$ என்றால், $u_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

(12) $\sum \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

$$u_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1+x^{2(n+1)}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}} \cdot \frac{1+x^{2n}}{x^n}$$

$$= x\,\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) $x < 1$ என்றால், $x = \dfrac{1}{y}$, $y > 1$ **என்க.**

$$\therefore x^{2n} = \left(\frac{1}{y^n}\right)^2, \quad y > 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{y^n}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x\,\frac{1+0}{1+0} = x$$

< 1 (எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது)

$\therefore$ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(ii) $x>1$ என்க.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=x\cdot\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}$$

$$=x\left\{\frac{\frac{1}{x^{2n}}+1}{\frac{1}{x^{2n}}+x^2}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x\left(\frac{0+1}{0+x^2}\right)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}<1 \quad \because x>1$$

∴ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(iii) $x=1$ என்றால், $u_n=\dfrac{1^n}{1+1^{2n}}=\dfrac{1}{2}$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$=\sum u_n=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\ldots \text{ (மு. வ.)}$$

$$=\tfrac{1}{2}(1+1+1+\ldots \text{ (மு. வ.)})$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum 1$$

ஆனால் $\sum 1$ ஆனது விரியும் தொடர்.

ஏனெனில் $\{s_n\}=\{n\}\to\infty$

(13) $x^2(\log^2)^q+x^3(\log^3)^q+x^4(\log^4)^q+\ldots$ (மு. வ).

$q>0$

$$u_n=x^{n+1}\,[\log(n+1)]^q$$

$$u_{n+1}=x^{n+2}\,[\log(n+2)]^q$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n}=x\left[\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right]^q$$

n ஆனது 3-ஐ அணுக, $\log(n+1)\to\infty$, $\log(n+2)\to\infty$ ஆனால் $\frac{\infty}{\infty}$ ஆனது தேராக் கணிதம் (Indeterminate quantity). ஆகையால், $\log(n+2)$-ஐ n-ஐக் குறித்து வகையிடு. அதுபோல்

log(n+1)-ஐயும் n-ஐக் குறித்து வகையிடு. பின்னர் எல்லை காண்க. இம்முறையைப் பற்றி விரிவாகப் பின்னர் காண்போம். அதுவரை குருட்டுப் பாடமாக இம்முறையைப் பின்பற்றுக. இம்முறைக்கு லோபிதால் விதி (d'Hospital's Rule) என்று பெயர்.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} x\left[\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right]^q = \lim_{n\to\infty} x\left[\frac{\left(\frac{1}{(n+2)}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)}\right)}\right]^q$$

$$= \lim_{n\to\infty} x\left[\frac{n+1}{n+2}\right]^q$$

$$= \lim_{n\to\infty} x\left\{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right\}^q = x\left(\frac{1+0}{1+0}\right)^q = x$$

$x<1$ என்றால் தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$x>1$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ விரிகிறது.

$x=1$ என்றால் தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$x=1$ என்னும்போது, $u_n=[\log(n+1)]^q$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} [\log(n+1)]^q = \infty \neq 0$$

$\therefore$ $\sum u_n$ ஆனது $x=1$-க்கு விரிகிறது.

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^{2n}}$

$$u_n = \frac{x^n}{1+n^2x^{2n}} \qquad \therefore \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1+(n+1)^2x^{2(n+1)}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{1+n^2x^{2n}}{1+(n+1)^2x^{2(n+1)}}$$

$$= x \cdot \frac{1+n^2x^{2n}}{1+(n+1)^2x^{2n+2}}$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) $x<1$ என்க. $\therefore \quad x=\frac{1}{y}, \quad y>1$ எனலாம்.

$$n^2x^{2n}=\frac{n^2}{y^{2n}}$$

$n\to$ என்றால் $n^2\to\infty$, $y^{2n}\to\infty$. ஆனால் $\frac{\infty}{\infty}$ என்பது தேராக் கணியமாயிற்றே! ஆகையால் லோபிதால் விதியைக் கடைபிடிக்க! n^2-ஐயும், y^{2n}-ஐயும் தனித்தனியே வகையிட்டுக் காண்க!

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n^2x^{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{y^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{2ny^{2n-1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y^{2n-1}}$$
$$=0$$

இதுபோல் $\lim_{n\to\infty}(n+1)^2x^{2n+2}=0$ என்று நிறுவலாம்.

$\therefore \quad x<1$ என்னும்போது, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x.\frac{1+0}{1+0}=x<1$

$\therefore$ தலம்பேரின்படி, $x<1$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(ii) $x>1$ என்க.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1+n^2x^{2n}}{1+(n+1)^2x^{2n+2}}\cdot x$$

$$=\frac{\frac{1}{n^2x^{2n}}+1}{\frac{1}{n^2x^{2n}}+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2x^2}\cdot x$$

$$=\frac{\frac{1}{n^2x^2n}+1}{\frac{1}{n^2x^{2n}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{0+1}{0+(1+0)^2x^2}\cdot x$$

$$=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}<1 \quad \because \quad x>1$$

∴ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(iii) $x=1$ என்க.

$$u_n = \frac{1}{1+n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} \text{ என்க. } \therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{1+n^2} \cdot n^2$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{0+1} = 1 \neq 0$$

∴ ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்படி, $\sum u_n$-ம், $\sum v_n$-ம் ஒரே தன்மையன.

ஆனால் 4·6-ன்படி, $\sum \frac{1}{n^2}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

∴ $\sum u_n$-ம் ஒருங்குகிறது.

(15) $2x+\frac{3}{8}x^2+\frac{4}{27}x^3+\ldots$ மு.வ.

இதனை $\frac{2}{1^3}x+\frac{3}{2^3}x^2+\frac{4}{3^3}x^3+\ldots$ மு. வ. என்று எழுதலாம்.

$$u_n = \frac{n+1}{n^3}x^n$$

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^3}x^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 x$$

$$= \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \cdot x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

$x<1$ என்றால், தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$x>1$ என்றால், தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

$x=1$ என்றால் தலம்பேரினால் என்ன பயன்? ஒன்றும் இல்லை.

$x=1$-க்கு, $u_n=\dfrac{n+1}{n^3}$

$$v_n=\frac{1}{n^2} \text{ என்றால் } \frac{u_n}{v_n}=\frac{n+1}{n^3}\cdot n^2=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}=1\neq 0$. ஆனால் $\sum v_n$ ஆனது 4·6-ன்படி ஒருங்குகிறது. $\therefore$ $\sum u_n$-ம் ஒருங்குகிறது.

(16) $\dfrac{1}{1^k}+\dfrac{x}{3^k}+\dfrac{x^2}{5^k}+\ldots+\dfrac{x^{n-1}}{(2n+1)^k}+\ldots$ (மு. வ.)

$$u_n=\frac{x^{n-1}}{(2n-1)^k}$$

$$u_{n+1}=\frac{x^n}{(2n+1)^k}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n}{(2n+1)^k}\cdot\frac{(2n-1)^k}{x^{n-1}}=x\cdot\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^k=x\left\{\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right\}^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) $x<1$ என்றால் தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது

(ii) $x>1$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது

(iii) $x=1$ என்றால் தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$x=1$க்கு, $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)^k}$

$v_n = \frac{1}{n^k}$ என்றால்

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^k}{(2n-1)^k} = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^k = \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^k}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \left(\frac{1}{2-0}\right)^k = \frac{1}{2^k} \neq 0$$

$\therefore$ $\sum u_n$-ம், $\sum v_n$-ம் ஒரே தன்மையன.

ஆனால் $\sum v_n$ ஆனது $\begin{cases} k>1 \text{ என்றால் ஒருங்குகிறது} \\ k \leq 1 \text{ என்றால் விரிகிறது} \end{cases}$

$\therefore$ $\sum u_n$-ம் $\begin{cases} k>1 \text{ என்றால் ஒருங்குகிறது} \\ k \leq 1 \text{ என்றால் விரிகிறது.} \end{cases}$

4·11. சோதனை 6. கோஷியின் முதல் மூல சோதனை (Cauchy's Root Test)

$\sum_{1}^{\infty} u_n$ என்பது நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} < 1$ என்றால் $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது

$\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} > 1$ என்றால், $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஆனது விரிகிறது.

நிறுவல்

(i) $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = l < 1$ என்க.

$l < 1$ என்பதால் $l + \varepsilon < 1$ என்றவாறு மிகமிகச் சிறிய $\varepsilon > 0$-ஐத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$\lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l$ என்பதால் $n \geq n_0 \rightarrow \left| u_n^{\frac{1}{n}} - l \right| < \varepsilon$

அதாவது $l - \varepsilon < u_n^{\frac{1}{n}} < l + \varepsilon$

$\therefore\ u_n < (l+\varepsilon)^n$

$u_{n_0} < (l+\epsilon)^{n_0}$

$u_{n_0+1} < (l+\epsilon)^{n_0+1}$

$u_{n_0+2} < (l+\epsilon)^{n_0+2}$ முதலியன.

இவற்றைக் கூட்ட, $u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots < (l+\epsilon)^{n_0} + (l+\epsilon)^{n_0+1}$

$+ (l+\epsilon)^{n_0+2} \dots$

$< (l+\varepsilon)^{n_0}\left[1 + (l+\epsilon) + (l+\epsilon)^2 + \dots\right]$

$(l+\epsilon)^{n_0} > 0$ என்பது மாறிலி.

மேலும் $1 + (l+\epsilon) + (l+\varepsilon)^2 + \dots$ என்பது ஒருங்கும் பெருக்குத் தொடர் (ஏனெனில் $l+\varepsilon < 1$)

$\therefore$ ஒப்பீட்டுச் சோதனையின்படி, $\sum u_n$ம் ஒருங்குகிறது.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{1/n} = l > 1$ என்க. $\therefore n \geq n_0 \to l-\varepsilon < u_n^{1/n} < l+\varepsilon$,

$\epsilon > 0$.

$l > 1$ என்பதால், $l-\varepsilon > 1$ என்றவாறு மிகச் சிறிய $\varepsilon > 0$ஐத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$u_n^{1/n} > l-\epsilon > 1,\ n \geq n_0$

$u_n > (l-\epsilon)^n,\ n \geq n_0$

$u_{n_0} > (l-\epsilon)^{n_0}$

$u_{n_0+1} > (l-\epsilon)^{n_0+1}$

$u_{n_0+2} > (l-\varepsilon)^{n_0+2}$

... ...

இவற்றைக் கூட்ட

$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \dots > (l-\epsilon)^{n_0}\{1 + (l-\epsilon) +$

$(l-\epsilon)^2 + \dots$ மு.வ.$\}$

$(l-\epsilon)^{n_0}$ என்பது நேர் மாறிலி எண்.

மேலும் $1+(l-\epsilon)+(l-\epsilon)^2+\ldots$ மு. வ. என்பது 1-ஐ விடப் பெரிய பொது விகிதமுள்ள பெருக்குத் தொடராகையால், இப்பெருக்குத் தொடர் விரிகிறது.

∴ ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்படி $\sum u_n$ம் விரிகிறது.

சோதனை 7. கோஷியின் இரண்டாவது சோதனை

$$u_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n^{1/n} = l$$

நிறுவல்

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \text{ என்றால்}$$

$$n \geqq n_0 \rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \epsilon, \epsilon > 0$$

$$\text{அதாவது } l-\epsilon > \frac{u_{n+1}}{u_n} < l+\epsilon, n \geqq n_0$$

$$\text{அதாவது } l-\epsilon < \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} < l+\epsilon$$

$$l-\varepsilon < \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \quad l+\epsilon$$

$$l-\epsilon < \frac{u_{n_0+3}}{u_{n_0+2}} < l+\epsilon$$

$$l-\epsilon < \frac{u_{o+p}}{u_{n_0+p-1}} < l+\epsilon$$

இவற்றையெல்லாம் மேலிருந்து கீழ்பெருக்க,

$$(l-\varepsilon)^p < \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}, \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}, \frac{u_{n_0+3}}{u_{n_0+2}} \ldots \frac{u_{n_0+p}}{u_{n_0+p-1}} < (l+\epsilon)^p$$

அதாவது $(l-\epsilon)^p < \dfrac{u_{n_0+p}}{u_{n_0}} < (l+\varepsilon)^p$

$\because\ u_{n_0} > 0,\ \therefore u_{n_0}(l-\epsilon)^p < u_{n_0+p} < u_{n_0}(l+\varepsilon)^p$

(n_0+p) படி மூலம் எடுக்க,

$$u_{n_0}^{1/(n_0+p)}(l-\epsilon)^{p/(n_0+p)} < u_{n_0+p}^{\frac{1}{n_0+p}} <$$

$$u_{n_0}^{\frac{1}{n_0+p}}(l+\epsilon)^{\frac{p}{n_0+p}}$$

n_0 என்பது ஒரு மாறிலி எண். p-ஐ ∞-க்கு அணுக விடுக.

$$\lim_{p\to\infty}(l-\epsilon)^{\frac{p}{n_0+p}} = l-\epsilon$$

$$\therefore l-2\varepsilon < (l-\epsilon)^{\frac{p}{n_0+p}} < l,\ n \geqq n_1$$

$$\lim_{p\to\infty}(l+\epsilon)^{\frac{p}{n_0+p}} = l+\varepsilon$$

$$\therefore\ l < (l+\epsilon)^{\frac{p}{n_0+p}} < l+2\epsilon,\quad n \geqq n_2$$

$$\therefore\ l-2\epsilon > u_m^{1/m} < l+2\epsilon,\ n \geqq m,\ m = \max(n_0, n_1, n_2)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = l.$$

குறிப்பு

இத்தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையாகாது. இதற்கு எதிர் உதாரணம்:

$1+a+ab+a^2b+a^2b^2+\ldots+a^nb^{n-1}+a^nb^n+\ldots$ (மு. வ.)

$a>0,\ b>0,\ a\neq b.$

$u_n = a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1}$ (n இரட்டை எண்)

$$= a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{b}$$

$$u_n^{1/n} = \sqrt{ab}\ \frac{1}{b^{1/n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \sqrt{ab}\,\frac{1}{(1)} = \sqrt{ab}$$

$$u_n = a^{\frac{n-1}{2}}\; b^{\frac{n-1}{2}-1} \quad (n \text{ ஒற்றை எண்})$$

$$= a^{\frac{n-1}{2}}\, b^{\frac{n-3}{2}}$$

$$= a^{\frac{n}{2}}\, b^{\frac{n}{2}}\; a^{-(1/2)}\quad b^{-(3/2)}$$

$$= \frac{a^{n/2}\quad b^{n/2}}{a^{1/2}\quad b^{3/2}}$$

$$u_n^{1/n} = \frac{\sqrt{ab}}{a^{1/(2n)}\; b^{3/(2n)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \sqrt{ab}$$

$\therefore$ n ஆனது இரட்டை எண்ணானாலும், ஒற்றை எண்ணானாலும்,

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \sqrt{ab}$$

n இரட்டை எண் என்றால்,

$$u_n = a^{n/2}\;\; b^{(n/2)-1}$$

$$u_{n+1} = a^{n/2}\;\; b^{n/2}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n/2}\quad b^{n/2}}{a^{n/2}\; b^{(n/2)-1}} = b.$$

இப்போது n ஒற்றையெண் என்றால்

$$u_n = a^{\frac{n-1}{2}} \qquad b^{\frac{n-1}{2}-1}$$

$$u_{n+1} = a^{\frac{n-1}{2}+1}\; b^{\frac{n-1}{2}-1}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{\frac{n-1}{2}+1}}{a^{\frac{n-1}{2}}}\;\; \frac{b^{\frac{n-1}{2}-1}}{b^{\frac{n-1}{2}-1}} = a.$$

$\therefore \quad u_n^{1/n} \to \sqrt{ab}$ என்றால், $\frac{u_{n+1}}{u_n} + \sqrt{ab}$

4·12. கோஷியின் விகித சோதனையை ஒட்டிய கணக்குகள்

கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

$$u_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

$$u_n^{1/n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore$ கோஷியின் விகித சோதனைப்படி, $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}}$

$$u_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}} \quad \text{என்றால்}$$

$$u_n^{1/n} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u^{1/n} = \frac{1}{e} < 1 \quad \because e > 1$$

$\therefore$ கோஷியின்படி, $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}^{n} x^n$

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n x^n$$

$$u_n^{1/n} = \left\{\frac{n+1}{n+2}\right\} x$$

$$= \left\{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right\} x \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} \quad x =$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று :

(i) $x<1$ என்றால், கோஷியின்படி $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது

(ii) $x>1$ என்றால் கோஷியின்படி $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது

(iii) $x=1$ என்றால் கோஷியினால் பயனில்லை.

$x=1$ என்னும்போது,

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \left\{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right\}^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2}\right]^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2}\right]^2} = \frac{e}{e^2}\Bigg) \because \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

$$y = \frac{n}{2}$$

$$= \frac{1}{e} \neq 0$$

$\therefore \sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

(4) $\sum \dfrac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

$$u_n = \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} \quad \therefore u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} < 1 \because e > 1$$

$\therefore$ கோஷியின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

4·13. சோதனை 7. "ராபெ"யின் சோதனை (Raabe's Test)

$\sum u_n$ என்பது நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right\} > 1 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ ஒருங்குகிறது.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right\} < 1 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ விரிகின்றது.}$$

நிறுவல்

$\sum u_n$-ஐ $\sum \frac{1}{n^p}$ உடன் ஒப்பிடுக.

$\sum \frac{1}{n^p}$ ஆனது $\begin{cases} p > 1 \text{ என்றால் ஒருங்குகிறது.} \\ p < 1 \text{ என்றால் விரிகிறது.} \end{cases}$ பார்க்க 4·6.

$p > 1$ என்க. $\therefore$ $\sum \frac{1}{n^p}$ ஒருங்குகிறது.

4·9 சோதனை 4-ன் படி, $\sum u_n$ ஒருங்கவேண்டுமானால்

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{\left(\frac{1}{(n+1)^p}\right)}{\left(\frac{1}{n^p}\right)} = \frac{n^p}{(n+1)^p}$$

$$\text{(அதாவது)} \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

$$\text{(அதாவது)} \quad \frac{u}{u_{n+1}} > 1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \ldots$$

$$\text{(அதாவது)} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 > \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \ldots$$

$$\text{அதாவது } n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > p + \frac{p(p-1)}{2n} + \ldots$$

அதாவது $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > p$

$> 1 \quad (\because p > 1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] > 1$ என்றால் $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்கும்.

இப்போது $p < 1$ என்க. $\therefore \sum\frac{1}{n^p}$ விரிகிறது.

4·9 சோதனை 4-ன்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரியவேண்டின்

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n^p}{(n+1)^p}$$

(அதாவது) $\frac{u_n}{u_{n+1}} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}$

$+ \ldots$ மு. வ.

அதாவது $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 < \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \ldots$ மு. வ.

அதாவது $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < p + \frac{p(p-1)}{2}\frac{1}{n} + \ldots$ மு. வ.

(அதாவது) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < p < 1 \quad (\because p < 1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] < 1$ என்றால $\sum u_n$ ஆனது விரியும்.

குறிப்பு

தலம்பேரின் சோதனை தவறினால் ராபெயைத் துணைக்கு அழைக்கலாம்.

$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] = 1$ என்றால் ராபெயினால் ஆதாயம் இல்லை.

4·14. ராபெயைப் பயன்படுத்தும் கணக்குகள்

கீழ்க்காணும் தொடர்களைச் சோதிக்க :

(1) $1 + \frac{1+\alpha}{1+\beta} + \frac{(1+\alpha)\ (2+\alpha)}{(1+\beta)\ (2+\beta)} + \ldots .$

முதல் உறுப்பாகிய 1-ஐ நீக்குக. அப்படியே நீக்கினல் தொடரின் தன்மை மாருது எனக் கண்டோம். இப்படி நீக்கு வதால் பயன், u_n-ஐத் தெளிவாக எழுதலாம் என்பதுதான்.

$$u_n = \frac{(1+\alpha)\ (2+\alpha)\ldots(n+\alpha)}{(1+\beta)\ (2+\beta)\ldots(n+\beta)}$$

$$u_{n+1} = \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(n+\alpha)(n+1+\alpha)}{(1+\beta)\ (2+\beta)\ldots(n+\beta)\ (n+1+\beta)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}$$

$$= \frac{1+\frac{1+\alpha}{n}}{1+\frac{1+\beta}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

தலம்பேரின் சோதனை தவறிவிட்டது.

ராபெயைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{n+1+\beta}{n+1+\alpha} - 1\right) = n\left(\frac{n+1+\beta-n-1-\alpha}{n+1+\alpha}\right)$$

$$= \frac{n(\beta-\alpha)}{n+1+\alpha} = (\beta-\alpha)\ \frac{1}{1+\frac{1+\alpha}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{\beta-\alpha}{1+0} = \beta-\alpha$$

$\therefore$ ராபெயின்படி

$\beta-\alpha>1$ (அதாவது) $\beta>1+\alpha$ என்ருல், $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\beta-\alpha<1$(அதாவது)$\beta<1+\alpha$ என்ருல், $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

$\beta-\alpha=1$ என்ருல், "ராபெ" தவறுகிறது.

அதாவது $\beta=1+\alpha$ என்ருல்

$$u_n = \frac{(1+\alpha)\ (2+\alpha)\ (3+\alpha)\ \ldots\ (n+\alpha)}{(2+\alpha)\ (3+\alpha)\ \ldots\ (n+\alpha)\ (n+1+\alpha)}$$

$$= \frac{1+\alpha}{n+(1+\alpha)}$$

$v_n = \frac{1}{n}$ என்க.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1+\alpha}{n+1+\alpha} \cdot n = \frac{1+\alpha}{1+\frac{1+\alpha}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1+\alpha \neq 0$$

($\alpha \neq -1$ ஏனெனில், $\alpha = -1$ என்றால் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $1+0+0+\ldots$ என்றாகிவிடும்.)

$\therefore$ $\sum u_n$-ம் $\sum v_n$-ம் ஒரே தன்மையன.

ஆனால் $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$ ஆனது விரிகின்றது.

$\therefore$ $\sum u_n$ ஆனது விரிகின்றது.

(2) $\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^3}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^4}{7} + \ldots$ மு.வ.

முதல் உறுப்பை நீக்குக. x உறுப்பின் கீழுள்ள உறுப்பானது, அண்மையிலுள்ள பின்னத்தின் விகுதியின் கடைசி எண்ணுடன் 1-ஐக் கூட்ட வரும்.

அப்போது, $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$

$$u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)\ (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n\ (2n+2)} \frac{x^{n+2}}{2n+3}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)\ (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n\ (2n+2)} \frac{x^{n+2}}{2n+3}$$

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)} \frac{2n+1}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{(2n+1)\ (2n+1)}{(2n+2)\ (2n+3)}\, x$$

$$= \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}\, x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) $x<1$ என்றால், தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(ii) $x>1$ என்றால், தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

(iii) $x=1$ என்றால், தலம்பேரினால் பயன் இல்லை.

$x=1$ என்றால்

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+2)\ (2n+3)}{(2n+1)^2}$$

$$\therefore n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{(2n+2)\ (2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right]$$

$$= n\left[\frac{4n^2+10n+6-4n^2-4n-1}{(2n+1)^2}\right]$$

$$= n\left[\frac{6n+5}{(2n+1)^2}\right] = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} = \frac{6+\frac{5}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$$

$\therefore$ ராபெயின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(3) $x^2 + \frac{2^2}{3\cdot 4}x^4 + \frac{2^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^8 + \cdots$

முதலுறுப்பை நீக்குக.

$$u_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (2n+2)} x^{2n+2}$$

$$u_{n+1} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2 \; (2n+2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (2n+2)(2n+3)(2n+4)} x^{2n+4}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+4)} \cdot \frac{x^{2n+4}}{x^{2n+2}}$$

$$= \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+4)} x^2 = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+14n+12} x^2 = \frac{4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{14}{n}+\frac{12}{n^2}} x^2$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x^2$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) $x^2 < 1$ என்றால், தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(ii) $x^2 > 1$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

(iii) $x^2 = 1$ என்றால் தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$x^2 = 1$ என்னும்போது

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{4n^2+14n+12}{4n^2+8n+4}$$

$$\therefore n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{4n^2+14n+12}{4n^2+8n+4} - 1\right) = n\left(\frac{6n+8}{4n^2+8n+4}\right)$$

$$= \frac{6n^2+8n}{4n^2+8n+4} = \frac{6+\frac{8}{n}}{4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{6}{4} > 1$$

$\therefore$ ராபேயின்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (2n)!}{(n!)^2}$

$$u_n = \frac{x^n (2n)!}{(n!)^2}$$

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}[2(n+1)!]}{[(n+1)!^2]}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1} (2n+2)!}{(n+1)!^2} \, \frac{(n!)^2}{x^n (2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} x$$

$$= \frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} x$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4x$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று :

(i) $4x<1$ (அதாவது) $x<\frac{1}{4}$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(ii) $4x>1$ (அதாவது) $x>\frac{1}{4}$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ விரிகிறது.

(iii) $4x=1$ என்றால் தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$$4x=1க்கு, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4}$$

$$\therefore n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} - 1\right] = \frac{n(2n+2)}{4n^2+6n+2} = \frac{n^2+n}{2n^2+3n+1}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\tfrac{1}{2}<1$$

ராபெயின்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

4·15. சோதனை : மடக்கை விகித சோதனை I (Logarithmic Ratio Test)

$\sum u_n$ ஆனது நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$$\lim_{n\to\infty} n \log \frac{u_n}{u_{n+1}}$$ ஆனது

>1 என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

<1 என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

இதனை ஷ்லோமில்ஃ (Schlomilch) சோதனை என்றும் சொல்லுவர்.

நிறுவல்

4·9 சோதனை 4-ஐப் பயன்படுத்தி, $\sum u_n$-ஐ $\sum \frac{1}{n^p}$ உடன் ஒப்பிடுவோம்.

$p>1$ என்றால் $\sum \frac{1}{n^p}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

மேலே குறிப்பிட்ட சோதனைப்படி,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n^p}{(n+1)^p}$ என்றால்தான் $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(அதாவது) $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^p$ என்றால்தான் $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

(அதாவது) $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^p$

(அதாவது)

$$\log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = p\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots \text{மு.வ.}\right)$$

(அதாவது) $\log\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{p}{n} - \frac{p}{2n^2} + \quad \ldots$

அதாவது $n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p - \frac{p}{2n} + \quad \ldots$

(அதாவது) $\lim_{n\to\infty} n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p > 1 \quad (\because\ p>1)$

$\therefore$ $\sum u_n$ ஆனது, $\lim_{n\to\infty}\left(n \log\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) > 1$ என்றால் ஒருங்குகிறது.

இப்போது $p<1$ என்றால் $\sum \frac{1}{n_p}$ ஆனது விரிகிறது.

அதே சோதனையை மேற்கண்டவாறு பயன்படுத்தினால்

$\lim_{n\to\infty}\left(n \log \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) < 1$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

இந்தச் சோதனையைப் பயன்படுத்திக் கணக்குகள்

கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க:

(1) $x + \frac{2^2x^2}{2\,!} + \frac{3^3x^3}{3\,!} + \frac{4^4x^4}{4\,!} + \frac{5^5x^5}{5\,!} + \ldots$ மு.வ.

$$u_n = \frac{n^n x^n}{n\,!}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}\ x^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\ \frac{n\,!}{n^n}\ \frac{x^{n+1}}{x^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e\,x \quad \because \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று:

(i) $ex<1$ (அதாவது) $x<\frac{1}{e}$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஒருங்கும்.

(ii) $ex>1$ (அதாவது) $x>\frac{1}{e}$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ விரியும்.

(iii) $ex=1$ (அதாவது) $x=\frac{1}{e}$ என்றால் தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$x=\frac{1}{e}$ என்னும்போது, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}$

$$\therefore \log\frac{u_n}{u_{n+1}} = \log\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \log e - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \log e - n\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots\right\}$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{4n^3} - \cdots$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2} - \cdots\right\}$$

$$\therefore\quad n\log\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2} - \cdots$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\log\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ மடக்கை விகித சோதனைப்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

(2) $\frac{a+x}{1!} + \frac{(a+2x)^2}{2!} + \frac{(a+3x)^3}{3!} + \cdots$

$$u_n = \frac{(a+nx)^n}{n!}$$

$$u_{n+1} = \frac{[a+(n+1)x]^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[a+(n+1)x]^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(a+nx)^n}$$

$$= \frac{\left[\frac{a}{(n+1)x} + 1\right]^{n+1}}{\left(\frac{a}{nx}+1\right)^n} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{n^n x^n}$$

$$= \frac{\left[\frac{a}{(n+1)x}+1\right]^{n+1}}{\left(\frac{a}{nx}+1\right)^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{(n+1)x}+1\right)^{n+1}}{\left(\frac{a}{nx}+1\right)^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = ex$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று :

(i) $ex<1$ (அதாவது) $x<\frac{1}{e}$ என்றால் தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(ii) $ex>1$ (அதாவது) $x>\frac{1}{e}$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ விரிகிறது.

(iii) $ex=1$ (அதாவது) $x=\frac{1}{e}$ என்றால் தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$x=\frac{1}{e}$ என்னும் போது,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left[\frac{ae}{(n+1)}+1\right]^{n+1}}{\left[\frac{ea}{n}+1\right]^{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{e}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{e\cdot\left(\frac{ea}{n}+1\right)^{n}}{\left(\frac{ae}{n+1}+1\right)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}=n\left[\log e+n\log\left(1+\frac{ea}{n}\right)-(n+1)\log\left(1+\frac{ae}{n+1}\right)\right.$$

$$\left.-n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=n\left[1+n\left\{\frac{ea}{n}-\frac{e^2a^2}{2n^2}+\frac{e^3a^3}{3n^3}-\dots\right\}\right.$$

$$-(n+1)\left\{\frac{ae}{n+1}-\frac{a^2e^2}{2(n+1)^2}+\frac{a^3e^3}{(3n+1)^3}-\dots\right\}$$

$$\left.-n\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\dots\right\}\right]$$

$$=n\left[1+ea-\frac{e^2a^2}{2n}+\frac{e^3a^3}{3n^2}-\dots\right.$$

$$-ae+\frac{a^2e^2}{2(n+1)}-\frac{e^3a^3}{3(n+1)^2}+\dots$$

$$\left.-1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\dots\right]$$

$$=n\left[\frac{e^2a^2+1}{2n}+\frac{a^2e^2}{2(n+1)}+\frac{e^3a^3-1}{3n^2}-\frac{a^3e^3}{3(n+1)^2}+\dots\right]$$

$$=\frac{1-e^2a^2}{2}+\frac{a^2e^2}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{e^3a^3-1}{3n}-\frac{a^3e^3}{3\left(n+2+\frac{1}{n}\right)}+\dots$$

$$\lim_{n \to \infty} n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1-e^2a^2}{2} + \frac{a^2e^2}{2(1+0)}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

∴ மடக்கை விகித சோதனைப்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

4·16. சோதனை 9. கோஷியின் ஒடுக்கல் சோதனை (Cauchy's Condensation Test)

(i) எல்லா நேர் முழு n-க்கும் $f(n)$ நேர்.

(ii) n அதிகமாக அதிகமாக, $f(n)$ நிலையாகக் குறைகிறது.

(iii) a என்பது 1-ஐ விடப் பெரிய நேர் முழு எண் என்றால்

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots$ மு.வ.

$af(a)+a^2f(a^2)+a^3f(a^3)+\ldots+a^nf(a^n)+\ldots$ மு.வ. என்ற இரு முடிவில்லாத் தொடர்கள் ஒரே தன்மையன, அதாவது இரண்டும் ஒருங்குகின்றன, அல்லது இரண்டும் விரிகின்றன.

நிறுவல்

$\sum f(n)$ ன் உறுப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு தொகுக்க :

$$\{f(1)+f(2)+\ldots+f(a)\}$$
$$+\{f(a+1)+f(a+2)+\ldots+f(a^2)\}$$
$$+\{f(a^2+1)+f(a^2+2)+\ldots+f(a^3)\}$$
$$+\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$+\{f(a^{n-2}+1)+f(a^{n-2}+2)+\ldots+f(a^{n-1})$$
$$+\{f(a^{n-1}+1)+f(a^{n-1}+2)+\ldots+f(a^n)$$
$$+\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

n-வது தொகுதியிலுள்ள தொகையை $g(n)$ என்க.

அதாவது $f(a^{n-1}+1)+f(a^{n-1}+2)+\ldots+f(a^n)=g(n)$ என்க.

இத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $=a^n-a^{n-1}$ $f(n)$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் சார்பாதலால்,

$f(a^{n-1}+1)>f(a^{n-1}+2)>\ldots>f(a^n)$. அதாவது இத் தொகுதியின் மிகச் சிறிய உறுப்பு $f(a^n)$ ஆகும்.

இப்போது, n ஆவது தொகுதியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் $f(a^n)$-ஆல் பிரதியிட்டால்,

$$f(a^n)+f(a^n)+\ldots<f(a^{n-1}+1)+f(a^{n-1}+2)+\ldots+f(a^n)$$

அதாவது $(a^n-a^{n-1})f(a^n)<g(n)$

$$a^{n-1}(a-1)f(a^n)<g(n)$$

$$a^n f(a^n)\left(\frac{a-1}{a}\right)<g(n)$$

அதாவது $a^n f(a^n)<\frac{a}{a-1}g(n)$

$a>1$ என்பதால் $\frac{a-1}{a}$ ஆனது நேர் முழு எண்

ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்படி, $\sum g(n)$ ஆனது ஒருங்கினால்,

$\sum a^n f(a^n)$ ஆனது ஒருங்கும்.

ஆனால் $\sum g(n)$ என்பது $\sum f(n)$

$\therefore$ $\sum a^n f(a^n)$-ம் $\sum f(n)$-ம் ஒன்றாக ஒருங்குகின்றன. இப்போது n-ஆவது தொகுதியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் $f(a^{n-1})$-ஆல் பிரதியிட்டால்

$$(a^n-a^{n-1})f(a^{n-1})>g(n)$$

$$a^{n-1}f(a^{n-1})(a-1)>g(n)$$

$$a^{n-1}f(a^{n-1})>\frac{1}{a-1}g(n)$$

$\sum g(n)$ ஆனது விரிந்தால், $\sum a^{n-1}f(a^{n-1})$-ம் விரிகிறது.

அதாவது $\sum f(n)$-ம் $\sum a^n f(a^n)$-ம் ஒன்றாக விரிகின்றன.

$\therefore$ $\sum f(n)$-ம் $\sum a^n f(a^n)$-ம் ஒன்றாக ஒருங்குகின்றன அல்லது ஒன்றாக விரிகின்றன.

சில சிறந்த முடிவுகள்

இரு முக்கியமான ஒப்பீட்டுத் தொடர்கள் கோஷியின் ஒடுக்கல் சோதனையைக் கொண்டு இரு ஒப்பீட்டுத் தொடர்களை அமைக்கலாம். இவற்றில் ஒன்றை ஏற்கனவே வேறு வழியில் படித்தோம்.

$\sum \frac{1}{n^p}$ ன் தன்மை என்ன ?

$f(n) = \frac{1}{n^p}$, $a=2$ என்க. $f(n)$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் தொடர்.

$$a^n f(a^n) = 2^n f(2^n) = 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

$\sum \frac{1}{n^p}$-ம், $\sum \frac{1}{(2^{p-1})^n}$-ம் ஒன்றாக விரிகின்றன, அல்லது ஒருங்குகின்றன.

$\sum \frac{1}{2^{(p-1)n}}$ ஆனது ஒரு முடிவில்லாத பெருக்குத் தொடர்.

இதன் பொது விகிதம் :

$\frac{1}{2^{(p-1)}}$ $p>1$ என்றால், $\frac{1}{2^{(p-1)}}<1$

$\therefore$ பெருக்குத் தொடர் ஒருங்குகிறது. $\therefore$ $p>1$க்கு $\sum \frac{1}{n^p}$-ம் ஒருங்குகிறது.

$p<1$ என்றால் $\frac{1}{2^{p-1}}>1$. $\therefore$ பெருக்குத்தொடர் விரிகிறது.

$\therefore$ $p<1$க்கு $\sum \frac{1}{n^p}$-ம் விரிகிறது.

$p=1$ என்றால் $\sum \frac{1}{2^{(p-1)n}} = \sum \frac{1}{2^{(1-1)n}} = \sum \frac{1}{2^0}$

$= \sum 1 = 1+1+1+ \ldots$ மு.வ. என்றாகிறது. இத்தொடர் விரிகிறது.

$\therefore$ $p=1$க்கு $\sum \frac{1}{n^p} = \sum \frac{1}{n}$-ம் விரிகிறது.

$\therefore$ $\sum \frac{1}{n^p}$ ஆனது

$$\begin{cases} p>1\text{-க்கு ஒருங்குகிறது.} \\ p\leqq 1\text{-க்கு விரிகிறது.} \end{cases}$$

$\sum \frac{1}{n^p}$ ஐப் பற்றி ஏற்கனவே படித்துள்ளோம்.

(ii) $\sum \frac{1}{n(\log n)^p}$ ன் தன்மை என்ன ?

$f(n) = \frac{1}{n(\log n)^p}$ என்க. $f(n)$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் சார்பு.

$a > 1$ என்றால் $a^n f(a^n) = a^n \frac{1}{a^n(\log a^n)^p}$

$$= \frac{1}{(n \log a)^p}$$

$$= \frac{1}{(\log a)^p} \frac{1}{n^p}$$

$\sum f(n)$ம் $\sum a^n f(a^n)$ம் ஒன்றாக ஒருங்குகின்றன, அல்லது விரிகின்றன.

அதாவது $\sum \frac{1}{n(\log n)^p}$ ம், $\frac{1}{(\log a)^p} \sum \frac{1}{n^p}$ ம் ஒன்றாக ஒருங்குகின்றன அல்லது விரிகின்றன. ஆனால், $\sum \frac{1}{n^p}$ ஆனது

$p > 1$ என்றால் ஒருங்குகிறது.
$p \leq 1$ என்றால் விரிகிறது.

$\therefore \sum \frac{1}{n(\log n)^p}$ ம் $p > 1$ என்றால் ஒருங்குகிறது. $p \leq 1$ என்றால் விரிகிறது.

இதுவும் ஒரு முக்கியமான ஒப்பீட்டுத் தொடர்.

4·17. கோஷியின் ஒடுக்கல் சோதனையை ஒட்டிய கணக்குகள்

கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க :

(1) $\sum \frac{1}{n \log n}$

$f(n) = \frac{1}{n \log n}$ என்றால் $2^n f(2^n) = 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \frac{1}{n \log 2}$

$\sum f(n)$ ம் $\frac{1}{\log 2}\sum\frac{1}{n}$ ம் ஒரே தன்மையன. ஆனால்

$\sum\frac{1}{n}$ ஆனது விரிகிறது. $\therefore \sum\frac{1}{n\log n}$ ம் விரிகிறது.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$

$f(n)=\frac{\log n}{n}$ என்றால் $2^n f(2^n)=2^n\ \frac{\log 2^n}{2^n}=\log\ 2^n$

$$= n\log 2$$

$\sum 2^n f(2^n) = (\log 2)\sum n$. இது விரியும் தொடர்.

ஏனெனில் $\lim_{n\to\infty} n=\infty \pm 0$

$\therefore \sum f(n)$-ம் விரிகின்றது.

(3) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n\log\log n}$

$$f(n)=\frac{1}{n\log n\log\log n}$$

$$2^n f(2^n)=2^n\left[\frac{1}{2^n\log 2^n\log\log 2^n}\right]=\frac{1}{n\log 2\log(n\log 2)}$$

$n\geq 3$ என்றால்தான் $\log(n\log 2)<1$; ஏனெனில் $\log 2<1$

$$\therefore \frac{1}{n\log 2\log(n\log 2)}>\frac{1}{n}$$

ஆனால் $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ ஆனது விரிகின்றது.

ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்படி, $\sum\frac{1}{n\log 2\log(n\log 2)}$ம் விரிகிறது.

$\therefore$ கோஷியின் ஒடுக்கல் விதிப்படி, $\sum f(n)$-ம் ஒருங்குகிறது.

4·18. சோதனை 10. மடக்கை சோதனை II—தமோர்கன்-பெர்ட்ரான்ட் சோதனை (De Morgan-Bertrand Test)

$\sum u_n$ என்பது நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n\right] \text{ ஆனது}$$

$$\begin{cases} >1 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ ஒருங்குகிறது.} \\ <1 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ விரிகிறது.}\end{cases}$$

நிறுவல்

$\sum u_n$, $\sum v_n$ என்பவை இரு நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர்களென்றும் $n \geq n_0 \to \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ என்றும் கொண்டால், $\sum v_n$ ஆனது ஒருங்கினால், $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குமென்றும் கண்டோம்.

$$\sum v_n = \sum \frac{1}{n(\log n)^p} \text{ என்க.}$$

4·17-ன் படி, $p>1$ என்றால் $\sum v_n$ ஒருங்குகிறது. $p>1$ என்க.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ ஒருங்கும்.}$$

அதாவது $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்க வேண்டின்

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n(\log n)^p}{(n+1)[\log(n+1)]^p}$$

$$\text{(அதாவது)} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{\log(n+1)}{\log n}\right]^p$$

$$\text{(அதாவது)} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\frac{\log n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}^p$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}^p$$

$$\text{அதாவது} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{1}{\log n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^p$$

∴ அதாவது

$$>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{1}{\log n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cdots\right)\right]^p$$

அதாவது

$$>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{2n^2\log n}+\cdots\right]^p$$

அதாவது $>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{p}{n\log n}+\left(\frac{1}{n^k\log n}\right.\right.$ $k\geqq 2$-ஐ உடைய உறுப்புகள்]

அதாவது

$$>1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\log n}+\left(\frac{1}{n^k\log n}\right.$$ $k\geqq 2$-ஐ உடைய உறுப்புகள்)

அதாவது

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}-1>\frac{1}{n}+\frac{p}{n\log n}+\left(\frac{1}{n^k\log n}\right.$$ $k\geqq 2$-ஐ உடைய உறுப்புகள்)

அதாவது

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1+\frac{p}{\log n}+\left(\frac{1}{n^{k-1}\log n}\right.$$

$k\geqq 2$-ஐ உடைய உறுப்புகள்)

அதாவது

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1>\frac{p}{\log n}+\left(\frac{1}{n^{k-1}\log n}\right.$$ $k\geqq 2$-ஐ உடைய உறுப்புகள்)

(அதாவது)

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-\right)-1\right]\log n>p+\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right.$$ $k>2$-ஐ உடைய உறுப்புகள்)

அதாவது $$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n>p>1 \because p>1$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]\log n>1$ என்றால் $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

இப்போது, $p<1$ என்றால் $\sum\frac{1}{n(\log n)^p}$ ஆனது விரிகிறது.

$\sum u_n$ ஆனது விரியவேண்டின்

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}<\frac{v_n}{v_{n+1}}$$

(அதாவது) $<1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\log n}$ மேற்கண்டவாறு.

(அதாவது) $\lim_{n\to\infty}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n<p<1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]\log n<1$ என்றால் $\sum u_n$ ஆனது விரிகின்றது.

குறிப்பு

இச்சோதனையைப் பொதுவாக, ராபெயின் சோதனை தவறினால் பயன்படுத்தலாம்.

இச்சோதனையை ஒட்டிய கணக்குகள் :

கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க :

1. $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2}x+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\,6^2}x^2+\ldots$ மு.வ.

முதல் உறுப்பை நீக்குக.

$$u_n=\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\ \ldots\ (2n+1)^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\ \ldots\ (2n+2)^2}x^n$$

$$u_{n+1}=\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n+1)^2\ (2n+3)^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n+2)^2\ (2n+4)^2}x^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+3)^2}{(2n+4)^2}x=\frac{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{4}{n}\right)^2}x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

$x<1$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$x>1$ என்றால் தலம்பேரின்படி $\sum u_n$ விரிகிறது.

$x=1$ என்றால் தலம்பேரினுல் என்ன பயன் ? ஒன்றுமில்லை.

$x=1$-க்கு

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+4)^2}{(2n+3)^2} = \frac{4n^2+16n+16}{4n^2+12n+9}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{4n+7}{4n^2+12n+9}$$

$$\therefore n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{4n^2+7n}{4n^2+12n+9}$$

$$= \frac{4+\frac{7}{n}}{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}}$$

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1$. $\therefore$ ராபெயினுலும் பயனில்லை.

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 = \frac{4n^2+7n}{4n^2+12n+9} - 1$$

$$= \frac{4n^2+7n-4n^2-12n-9}{4n^2+12n+9}$$

$$= \frac{-5n-9}{4n^2+12n+9}$$

$$= \frac{-5-\frac{9}{n}}{4n+12+\frac{9}{n}}$$

$$= \frac{-\left(5+\frac{9}{n}\right)}{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{5+\frac{9}{n}}{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}$$

$$= -\frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}$$

இப்போது, $\lim_{n\to\infty} \log n = \infty$ $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. $\frac{\infty}{\infty}$ என்பது தேராக் கணியம். ஆகையால் "லோபிதா" விதிப்படி (l'Hospital's Rule) பகுதி விகுதியில் உள்ள $\log n$-ஐயும் n-ஐயும் தனித்தனியே n-ஐப் பொறுத்து வகையீடு கண்டு, அதன்பின் எல்லை காண்க.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n = 0 < 1$$

$\therefore$ தமோர்கன்-பெர்ட்ராண்ட் சோதனைப்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

(2) $$1+\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}+\ldots$$

முதல் உறுப்பை நீக்குக.

$$u_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)(b+n)}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ∴ தலம்பேரின் சோதனை தவறியது.

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{b+n}{a+n} - 1\right) = n\left(\frac{b-a}{a+n}\right) = \frac{b-a}{\frac{a}{n}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = b-a$$

$b-a>1$ என்றால், ராபெயின்படி $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$b-a<1$ என்றால், ராபெயின்படி $\sum u_n$ விரிகிறது.

$b-a=1$ என்றால், ராபெயினாலும் பயனில்லை.

∴ $b-a=1$ என்னும்போது, $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{a+n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right]\log n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{a+n} - 1\right]\log n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-a-n}{a+n}\right]\log n = -a \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{a+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{-a\frac{\frac{1}{n}}{1}\right\} \text{ (லோபிதா விதிப்படி)}$$

$= 0<1$ ∴ $\sum u_n$ ஆனது, தமோர்கன்-பெர்ட்ராண்ட் சோதனைப்படி விரிகிறது.

(3) $1+\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^p + \dots$

முதல் உறுப்பை நீக்குக.

$$u_n = \left(\frac{1\cdot3\cdot5 \ \dots \ (2n-1)}{2\cdot4\cdot6 \ \dots \ 2n}\right)^p$$

$$u_{n+1} = \left(\frac{1\cdot3\cdot5 \ \dots \ (2n-1)\ (2n+1)}{2\cdot4\cdot6 \ \dots \ 2n\ (2n+2)}\right)^p$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p = \left\{\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right\}^p$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2+0}{2+0}\right)^p = 1 \therefore$ தலம்பேரினால் பயனில்லை.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$$

$$\therefore \log \frac{u_n}{u_{n+1}} = p[\log(2n+2) - \log(2n+1)]$$

$$= p\left[\log 2n\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log 2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$= p\left[\log 2n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log 2n - \log\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$= p\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$= p\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{24n^3} - \cdots\right)\right]$$

$$= p\left[\frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + \frac{7}{24n^3} \cdots\right]$$

$$\therefore n\log\frac{u_n}{u_{n+1}} = n\,p\left[\frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + \frac{7}{24n^3} \cdots\right]$$

$$= p\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + \frac{7}{24n^2} \cdots\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\log\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{p}{2}$$

மடக்கை விகித சோதனை I-ன்படி,

$$\begin{cases} \frac{p}{2} > 1 \text{ (அதாவது) } p > 2 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ ஆனது ஒருங்குகிறது.} \\ \frac{p}{2} < 1 \text{ (அதாவது) } p < 2 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ ஆனது விரிகிறது.} \end{cases}$$

$\frac{p}{2} = 1$ அதாவது $p = 2$ என்றால் மடக்கை விகித சோதனை உதவாது.

$\therefore p = 2$ என்றால்

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+4n+1}$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{4n+3}{4n^2+4n+1}\right] = \frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1}$$

$$= \frac{4 + \frac{3}{n}}{4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1.$ $\therefore$ ராபெயும் உதவாது.

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 = \frac{4n^2+3n-4n^2-4n-1}{4n^2+4n+1} = \frac{-n-1}{4n^2+4n+1}$$

$$\therefore \left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\log n = \frac{-(n+1)\log n}{4n^2+4n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\log n$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{n+1}{2} + \log n}{8n+4}\right\} \text{(லோபிதால் விதி)}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+\frac{1}{n}+\log n}{8n+4}\right\}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{8}\right\} \text{ (லோபிதால்படி)}$$

$$=0<1$$

∴ தமோர்கன்-பெர்ட்ராண்ட் சோதனைப்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

4. அதி பெருக்குத் தொடர் (Hypergeometric Series)

α, β, γ, x என்பவை யாவும் நேர் மெய்யெண்கள் என்றால்

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\,\gamma(\gamma+1)}x^2+$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ (\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$ மு.வ. என்ற தொடரைச் சோதிக்க.

முதல் உறுப்பை நீக்குக.

$$u_n=\frac{\alpha\ (\alpha+1)\ \ (\alpha+2)\ \ldots(\alpha+n-1)\ .\ \beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}x^n$$

$$u_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)(\beta+n)}{1\cdot 2\ \ldots\ n\ (n+1)\ \gamma\ (\gamma+1)\ \ldots\ (\gamma+n-1)\ (\gamma+n)}x^{n+1}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n)\ \ (\beta+n)}{(n+1)\ \ (\gamma+n)}x=\frac{n^2+(\alpha+\beta)\ n+\alpha\beta}{n^2+(1+\gamma)\,n+\gamma}\cdot x$$

$$=\frac{1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{\alpha\beta}{n^2}}{1+\frac{1+\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}}\cdot x$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x$$

∴ தலம்பேரின்படி, $\sum u_n$ ஆனது

$x<1$ என்றால் ஒருங்குகிறது.
$x>1$ என்றால் விரிகிறது.
$x=1$ என்றால் தலம்பேரினால் ஆதாயம் இல்லை.

$x=1$ என்னும்போது,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^2+(1+\gamma)\,n+\gamma}{n^2+(\alpha+\beta)\,n+\alpha\,\beta}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{n\,(1+\gamma-\alpha-\beta)+\gamma-\alpha\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}$$

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right]=\frac{n^2\,(1+\gamma-\alpha-\beta)+(\gamma-\alpha\beta)n}{n^2+(\alpha+\beta)\,n+\alpha\beta}$$

$$=\frac{(1+\gamma-\alpha-\beta)+\dfrac{(\gamma-\alpha)}{n}}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{n}+\dfrac{\alpha\beta}{n^2\beta}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right]=1+\gamma-\alpha-\beta$$

ராபெயின் சோதனைப்படி,

$1+\gamma-\alpha-\beta>1$, அதாவது $\gamma>\alpha+\beta$ என்றால், $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$\gamma<\alpha+\beta$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

$\gamma=\alpha+\beta$ என்றால் ராபெயின் சோதனையினால் பயனில்லை.

$\therefore\ \gamma=\alpha+\beta$ என்னும்போது,

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right]-1=\frac{n^2+(\alpha+\beta-\alpha\beta)n}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}-1$$

$$=\frac{-\alpha\beta n-\alpha\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n=\lim_{n\to\infty}\frac{-\alpha\beta n-\alpha\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}\cdot\log n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-\alpha\beta n-\alpha\beta)\dfrac{1}{n}-\dfrac{\alpha\beta}{n}}{2n+\alpha+\beta}\quad\text{(லோபிதால் விதி)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-\alpha\beta - \frac{\alpha\beta}{n} - \frac{\alpha\beta}{n}}{2n + (\alpha + \beta)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{-\alpha\beta}{n} - \frac{2\alpha\beta}{n^2}}{2 + \frac{\alpha + \beta}{n}}$$

$$= \frac{0 - 0}{2 + 0} = 0 < 1$$

∴ தமோர்கன் - பெர்ட்ராண்ட் சோதனைப்படி, $\sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

4·19. மேற்கொண்டு ஒரு சோதனைக்கான ஒரிரு குறியீட்டு முறைகளைக் காண்போம்.

***O, o* குறியீட்டு முறைகள்**

தற்காலத்திய முன்னேற்ற மடைந்துள்ள கணித இலக்கியத்தில் வெகுவாக இக்குறியீட்டு முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். இவற்றை முதன் முதலில் கணித உலகிற்கு அறிமுகப்படுத்தியவர் லந்தொவ் (Landau) என்ற கணித மேதை.

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ என்பவை இரு ஒழுங்கு வரிசைகள் என்க. இவற்றில் $b_n > 0$, $\{b_n\}$ ஒரே முறைத்தன்மை(monotonic) யது (அதாவது ஒரே முறை ஏறும் அல்லது இறங்கும் தன்மையது) என்ற பண்புகளை $\{b_n\}$ பெற்றிருக்கட்டும்.

∴ n ஆனது ∞-ஐ அணுக, $\{b_n\}$ ஆனது ஒரு எல்லைக்கு (இவ்வெல்லை 0 ஆகவோ, $+\infty$ ஆகவோ இருக்கலாம்) ஒருங்குகிறது. n_0, k என்ற இரு நேர் மாறிலி எண்கள், $n \geq n_0 \rightarrow |a_n| < kb_n$ என்றவாறு இருந்தால், $a_n = O(b_n)$ என்று எழுதுவோம்.

அதாவது, $\left\{\frac{|a_n|}{b_n}\right\}$ ஆனது வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசை என்றால்,

$a_n = O(b_n)$ என்றெழுதலாம்.

$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = 0$ என்றால், $a_n = o(b_n)$ என்றெழுதுவோம்.

குறிப்பாக, μ என்பது ஒரு மாறிலி எண்ணுனுல், $\mu n = O(n)$

$\mu n = 0(n^2)$

ஏனெனில் $\frac{|\mu n|}{n} < \mu + 1 \quad \therefore \mu n = O(n)$

$$\frac{\mu n}{n^2} = \frac{\mu}{n} \quad \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\mu}{n} = 0 \quad \therefore \mu n = 0(n^2)$$

இக்குறியீட்டு முறைகளின் சில எளிய பண்புகள்

$a_n = O(1)$ என்றுல் $|a_n| > k$ (1) அதாவது, n ஆனது ∞-ஐ அணுக, $\{a_n\}$ ஆனது ஒரு எல்லேக்கு ஒருங்குகிறது என்பது பொருள்.

உதாரணமாக $\frac{2n^2+1}{3n^2-5} = O(1)$

இப்போது $a_n = 0(1)$ என்றுல் $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0$ அதாவது

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ என்று பொருள். மேலும் கீழ்க்கண்ட

$O(a_n) + O(b_n) = O(a_n + b_n)$

$O(a_n)O(b_n) = O(a_n b_n)$

$b_n = O(a_n)$, $c_n = O(a_n)$ என்றுல்

$b_n \pm c_n = O(a_n)$, $b_n + a_n = O(a_n)$ என்ற பண்புகளின் நிறுவலே மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டது.

4·20. "கௌஸ்"-ன் விதி (Rule of Gauss) அல்லது "கௌஸ்"-ன் சோதனே (Gauss's Test)

$\sum u_n$ என்பது நேருறுப்பு முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$\frac{u_n}{u_{n+1}}$-ஐ $1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, $p > 1$ என்றவாறு எழுத முடியுமாஞல்,

$\mu > 1$ என்றுல் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது

$\mu < 1$ என்றுல் $\sum u_n$ விரிகிறது.

நிறுவல்

(i) $\mu \neq 1$ என்க.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu + O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu \quad \because p>1$$

ராபெயின் சோதனைப்படி, $\mu>1$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது. $\mu<1$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

(ii) $\mu=1$ என்க.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$$\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right\} \log n = (\log n)\, O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$\delta>0$ என்றால் $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\delta} \to 0 \therefore \lim_{n\to\infty} \log n\, O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right) = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \log n = 0 < 1$$

$\therefore$ தமோர்கன்-பெர்ட்ராண்ட் சோதனைப்படி, $\sum u_n$ விரிகிறது.

கவனிக்கத்தக்க குறிப்புகள்

1. தலம்பேரும், ராபெயும் நமக்கு உதவாத சமயங்களில் கௌஸை நாம் தைரியமாகத் துணைக்கழைக்கலாம்.

2. கௌஸ் சோதனையின் மறு உரு :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1+ \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+n}}\right), \lambda>0 \text{ என்றால்}$$

$\mu>1$க்கு $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$\mu\leq 1$க்கு $\sum u_n$ விரிகிறது.

3. கௌஸ் சோதனையின் பிறிதொரு உரு :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1+ \frac{\mu}{n} + \frac{\lambda n}{n^2},$$ $\{\lambda n\}$ வரம்புள்ளது என்றால் $\mu>1$க்கு $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது. $\mu\leq 1$க்கு $\sum u_n$ விரிகிறது.

4. ஒரு தொடரின் $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ ஆனது தொகுதியிலும், விகுதியிலும் பல்லுறுப்புகளைக் கொண்ட பின்னமாக இருந்தால் கௌஸ் சோதனையினால் மிகுந்த பயனுண்டு.

உதாரணமாக,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^m + p_1 n^{m-1} + p_2 n^{m-2} + \dots}{n^m + q_1 n^{m-1} + q_2 n^{m-2} + \dots}$$

வலது பக்க பின்னத்தின் தொகுதியையும் விகுதியையும் n^m-ஆல் வகுக்க,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1+\frac{p_1}{n}+\frac{p_2}{n^2}+\dots}{1+\frac{q_1}{n}+\frac{q_2}{n^2}+\dots}$$

$$= \left(1+\frac{p_1}{n}+\frac{p_2}{n^2}+\dots\right)\left(1+\frac{q_1}{n}+\frac{q_2}{n^2}+\dots\right)^{-1}$$

$$= \left\{1+\frac{p_1}{n}+O\left(\frac{l}{n^2}\right)\right\}\left\{1+\left[\frac{q_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right\}^{-1}$$

$$= \left\{1+\frac{p_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\left\{1-\frac{q_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

$$= 1 - \frac{q_1}{n} + \frac{p_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{p_1 - q_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

∴ கௌஸின் சோதனைப்படி,

$$\begin{cases} p_1 - q_1 > 1 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ ஒருங்குகிறது.} \\ p_1 - q_1 \leqq 1 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ விரிகிறது.} \end{cases}$$

5. கௌஸ் சோதனையின் மற்றொரு உரு :

எல்லா n-க்கும், $u_n > 0$

$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu}{n^2} + \frac{\lambda}{n^3} + \ldots$ ($\mu, \nu, \lambda \ldots$ முடிவுள்ள எண்கள்) என்றால், $\mu > 1$க்கு $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது,

$\mu \leqq 1$க்கு $\sum u_n$ விரிகிறது.

4·21. "கும்மர்"-ன் சோதனை (Kummer's Test Criteria)

$\sum u_n$ என்பது சோதனைக்குட்பட்ட நேருறுப்புத் தொடர் என்றும் $\sum \frac{1}{d_n}$ என்பது தெரிந்த நேருறுப்பு விரியும் தொடர் என்றும் கொள்க.

$v_n = d_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - d_{n+1}$ என்றெழுதுக.

(i) எல்லா $n \geqq n_0$க்கும், $v_n > \alpha > 0$ என்றவாறு n_0 என்றொரு எண் இருக்குமானால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(ii) எல்லா $n \geqq m_0$-க்கும் $v_n \leqq 0$ என்றவாறு m_0 என்றொரு எண் இருக்குமானால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

நிறுவல்

(i) $d_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - d_{n+1} > \alpha,\ n > n_0 \quad \because\ v_n \geqq \alpha$

$d_n u_n - d_{n+1} u_{n+1} > \alpha u_{n+1},\ n \geqq n_0 \quad \because\ u_{n+1} > 0$

$$\therefore \begin{cases} d_{n_0} u_{n_0} - d_{n_0+1} u_{n_0+1} > \alpha u_{n_0+1} \\ d_{n_0+1} u_{n_0+1} - d_{n_0+2} u_{n_0+2} > \alpha u_{n_0+2} \\ d_{n_0+2} u_{n_0+2} - d_{n_0+3} u_{n_0+3} > \alpha u_{n_0+3} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ d_{n_0+p-1} u_{n_0+p-1} - d_{n_0+p} u_{n_0+p} > \alpha u_{n_0+p} \end{cases}$$

இவற்றைக் கூட்ட

$$d_{n_0} u_{n_0} - d_{n_0+p} u_{n_0+p} > \alpha(u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \dots + u_{n_0+p})$$

இப்போது $d_{n_0+p} u_{n_0+p}$ என்பது நேர் எண்.

$$\therefore \quad d_{n_0} u_{n_0} > \alpha(u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \dots + u_{n_0+p})$$

அதாவது $d_{n_0} u_{n_0} > \alpha(s_{n_0+p} - s_{n_0})$

அதாவது, $\dfrac{d_{n_0} u_{n_0}}{\alpha} > s_{n_0+p} - s_{n_0}$

(அதாவது) $s_{n_0+p} - s_{n_0} < \dfrac{d_{n_0} u_{n_0}}{\alpha}$

(அதாவது) $s_{n_0+p} < s_{n_0} + \dfrac{d_{n_0} u_{n_0}}{\alpha} =$ மாறிலி எண்

$\therefore$ கோஷியின் ஒருங்கல் பொதுவிதிப்படி, $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

குறிப்பு

இங்கே $\sum \dfrac{1}{d_n}$ ன் விரியும் தன்மையை எங்கும் பயன்படுத்தவில்லை.

$\therefore$ (i)-ஐப் பொறுத்தவரை, d_n யாதேனும் ஒரு நேர் எண் என்று கொண்டாலே போதும்.

(ii) $d_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - d_{n+1} \leq 0,\ n \geq m_0,\ (\because\ v_n \leq 0)$

$$d_n u_n \geq d_{n+1} u_{n+1},\ n \geq m_0$$

$$d_{m_0} u_{m_0} \leq d_{m_0+1} u_{m_0+1} \leq d_{m_0+2} u_{m_0+2} \leq \dots \leq d_n u_n$$

$d_{m_0} u_{m_0} =$ மாறிலி k என்றால்

$k \leqq d_n u_n$

(அதாவது) $u_n \geqq \frac{k}{d_n}$

ஆனால் $\sum \frac{1}{d_n}$ ஆனது விரிகிறது.

$\therefore$ ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்படி, $\sum u_n$-ம் விரிகிறது.

4·22. கும்மர் சோதனையின் மாற்றுவரை (**Alternative Form of Kummer's Criteria**)

$\sum u_n$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட நேருறுப்புத் தொடர்.

$\sum \frac{1}{d_n}$ ஆனது தெரிந்த விரியும் நேருறுப்புத் தொடர்.

$$v_n = d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1}$$

(i) $\underline{\lim}\, v_n > 0$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(ii) $\overline{\lim}\, v_n < 0$ என்றால், $\sum u_n$ விரிகிறது.

குறிப்பாக, $\lim_{n \to \infty} v_n = l$ (அதாவது $\overline{\lim}\, v_n = \underline{\lim}\, v_n = l$) என்றால்

$l > 0$க்கு, $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$l < 0$க்கு, $\sum u_n$ விரிகிறது.

நிறுவல்

(i) $\underline{\lim}\, v_n = \lambda > 0$ என்க.

கீழ் எல்லையின் வரை இலக்கணப்படி,

$v_n > \lambda - \frac{1}{2}\lambda$

(அதாவது) $v_n > \frac{1}{2}\lambda$

$\therefore$ **4·21-ல்** கும்மர் சோதனையின் (i)-ல் α-க்குப் பதில் இந்த $\frac{1}{2}\lambda$-ப் பிரதியிடுக.

4·21-ல் (i)-ல் $v_n > \alpha$, $n \geqq n_0$ என்றால்

$\underline{\lim}\ v_n > \alpha > 0$, $n \geqq n_0$

$\therefore\ \underline{\lim}\ v_n > \frac{1}{2}\lambda > 0$

$\therefore$ இதுதான் 4·22-ல் (i)-ன் நிபந்தனை.

$\therefore$ 4·21 (i)-ன்படி $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது

(ii) $\overline{\lim}\ v_n < 0$ என்றால்,

$\overline{\lim}\ v_n = -\Lambda < 0$, $(\Lambda > 0)$

$\therefore\ n > m_0$-க்கு, $v_n < 1 - \Lambda + \frac{1}{2}\Lambda$

(அதாவது) $n > m_0$-க்கு, $v_n < 0$

இதுதான் 4·21-ல் (ii)-ன் நிபந்தனை.

$\therefore\ \sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

4·23. கும்மர் சோதனையின் முக்கிய விளைவுகள்

(i) கும்மர் சோதனையில் $d_n = 1$ என்க.

அப்போது $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{d_n} = 1 + 1 + 1 + \ldots$ மு.வ. என்பது விரியும் தொடர்.

$$v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1$$

4·22-ன் படி, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n > 0$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

< 0 என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

(அதாவது) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} > 1$, (அதாவது) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \rightarrow \sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} < 1$, (அதாவது) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \rightarrow \sum u_n$ விரிகிறது.

இதுதான் தலம்பேரின் விகித சோதனை.

(ii)கும்மர் சோதனையில் $d_n=n$ என்க.

அப்போது $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ஆனது விரியும் தொடர்.

$$\therefore v_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$$

$$= n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1$$

4·22-ன்படி, $\lim_{n\to\infty} v_n > 0$ என்றால் (அதாவது)

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$\lim_{n\to\infty} v_n < 0$ என்றால் (அதாவது) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

இதுதான் ராபெயின் சோதனை.

(iii) $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ என்க.

$\mu \neq 1$ என்றால்

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu$$

∴ ராபெயின்படி, $\mu > 1$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$\mu < 1$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

இப்போது $\mu = 1$ என்க.

கும்மர் சோதனையில் $d_n = n \log n$ என்றால்

$\sum d_n = \sum \frac{1}{n \log n}$ இது விரிகிறது. (கோஷியின் ஒடுக்கல் சோதனையின் கீழ்)

$$v_n = d_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - d_{n+1}$$

$$= (n \log n) \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\log(n+1)$$

$$= (n \log n)\left\{1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} - (n+1)\log(n+1)$$

$$= n \log n + \log n + O\left(\frac{\log n}{n}\right) - (n+1)\left\{\log n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\},$$

$$\because \mu = 1$$

$$= n \log n + \log n + O\left(\frac{\log n}{n}\right) - (n+1)\left\{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= n \log n + \log n + O\left(\frac{\log n}{n}\right) - n \log n - \log n$$

$$- (n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= O\left(\frac{\log n}{n}\right) - (n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$+(n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$+(n+1)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right]$$

$$+\left[\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \cdots \\ + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \cdots \end{array}\right] = +\left[1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} (n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} v_n = 0 - 1 = -1 < 0$$

∴ கும்மர் சோதனைப்படி u_n விரிகிறது.

4·24 அபெல் அல்லது ப்ரிங்ஷைம்-ன் தேற்றம் (Abel's or Pringsheim's Theorem)

$\sum u_n$ ஆனது

ஒரே முறை இறங்கும் ஒருங்கும் நேருறுப்புத் தொடர் என்றால்

$$\lim_{n\to\infty} n\, u_n = 0$$

நிறுவல்

$\sum u_n$ ஒருங்குவதால்,

$$n \geqq n_0 \to |s_{n+p} - s_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ p=0,1,2,3,\ldots n,\ldots,\ \varepsilon>0$$

என்றவாறு n_0 என்ற எண்ணைக் காணலாம். இது கோஷி யின் ஒருங்கல் பொதுவிதி.

(அதாவது) $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}<\frac{\epsilon}{2}$

$\sum u_n$ ஆனது ஒரே முறை இறங்குவதால்

$u_{n+1} \geqq u_{n+2} \geqq u_{n+3} \ldots \geqq u_{n+p}$

$\therefore\ p\, u_{n+p} < \frac{\epsilon}{2}$

$p=n+q+1,\quad q=0,1,2,\ldots$ என்க.

$n<p \to n\, u_{n+p} < p\, u_{n+p}$.

$\therefore\ n\, u_{n+p} + p\, u_{n+p} < 2p\, u_{n+p} < \epsilon$

(அதாவது) $(n+p)\, u_{n+p} < \epsilon$

(அதாவது) $(n+n+q+1)\, u_{n+n+q+1} < \epsilon$

(அதாவது) $(2n+1+q)\, u_{2+n+q+1} < \epsilon$

(அதாவது) $(m+q)\, u_{m+q} < \epsilon,\ q=0,1,2,\ldots$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} m\, u_m = 0$$

(அதாவது) $\lim_{n \to \infty} n\ u_n = 0.$

குறிப்பு

இந்தத் தேற்றம் ஒருங்கலுக்கு வேண்டிய நிபந்தனை (Necessary Condition)யே தவிர, போதிய நிபந்தனையே இல்லை. அதாவது, மேற்கண்ட தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மை இல்லை. $\sum u_n$ என்பது ஒரே முறை இறங்கும் உறுப்புகளுடைய நேருறுப்புத் தொடர் என்றும், $\lim_{n \to \infty} n\ u_n = 0$ என்றும் கொண்டால்.

சுவையான ஒரு முடிவு

ப்ரிங்ஷைம் தேற்றத்தைக் கொண்டு $\sum \frac{1}{n}$ ஆனது விரிகிறது என நிறுவலாம்.

ஏனெனில், $n\ u_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

$$\lim_{n \to \infty} n\ u_n = 1 \neq 0$$

$\therefore\ \sum \frac{1}{n}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

4·25. நேர், குறை உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர்கள் (Series of Positive and Negative Terms)

நாம் இதுவரையில் படித்தது எல்லாமே நேர் உறுப்புகள் அல்லது எல்லாமே குறை உறுப்புகள் உள்ள தொடர்களைப் பற்றியதாகும்.

ஒரு தொடரில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள குறை உறுப்புகளும், மற்றெல்லாம் முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள நேர் உறுப்புகளாயிருப்பின் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள குறை உறுப்புகளின் தொகையைக் கண்டுபிடித்து விடலாமாகையால், எடுத்துக்கொண்ட தொடரின் ஒருங்கும் அல்லது விரியும் தன்மை யானது நேருறுப்புத் தொடரின் தன்மையைப் போலத்தான். ஆனால், இப்பகுதியில் நாம் படிக்கப்போவது, முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள நேர் உறுப்புகளையும், குறை உறுப்புகளை யும் கொண்ட முடிவில்லாத தொடரைப் பற்றியதாகும்.

4·26. அற ஒருங்குத் தொடர் (Absolutely Convergent Series) வரை இலக்கணம்.

$\sum_{n=1}^{n=\infty} |u_n|$ ஆனது ஒருங்கும் முடிவில்லாத தொடரானல்

$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$-ஐ அற ஒருங்குத் தொடர் அல்லது அற குவியுந் தொடர் என்போம். சுருக்கமாக இதனை அ.ஒ.தொ. என்றெழுதுவோம்.

தேற்றம் 1

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஆனது அ.ஒ.தொ. என்றால்,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஆனது ஒருங்கும்.

நிறுவல்

வரை இலக்கணப்படி, $\sum |u_n|$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\therefore$ கோஷியின் ஒருங்கல் பொதுவிதிப்படி,

$$\big|\, |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| \,\big| < \epsilon,\ p > 0,\ \epsilon > 0,\ n \geq n_0$$

ஆனால் $|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| \leq \epsilon,\ n \geq n_0$

$\therefore$ கோஷியின் ஒருங்கல் பொதுவிதிப்படி, $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

தேற்றம் 2

ஒரு அ. ஒ. தொ.-வின் உறுப்புகளின் வரிசையை எந்த விதமாகக் கலைத்தாலும் அத்தொடரின் தொகை மாறவே மாறாது.

நிறுவல்

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வரிசையில் $\sum u_n$-ன் நேருறுப்புகளை மட்டும் உடைய முடிவில்லாத் தொடர் என்க.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வரிசையில் $\sum u_n$ குறை உறுப்புகளை மட்டும் உடைய முடிவில்லாத் தொடர்.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad S' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{+}, \; -S'' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{-} \quad S''' = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$$

$\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_{m_0}}_{\text{நேர் உறுப்புகள்}} + \underbrace{u_{m_0+1} + \ldots + u_k}_{\text{குறை உறுப்புகள்}}$-ல் முதல் m_0 உறுப்புகள்

நேர் என்றும், மற்றவை குறையென்றும் கொள்க. இந்த குறை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $k-m_0=n_0$ என்க.

$u_1 + u_2 + \ldots + u_{m_0} = S_{m_0}$ என்றும், $u_{m_0+1} + \ldots + u_k = -S_{n_0}$ என்றும் கொள்க.

$\therefore \quad S_k = S_{m_0} - S_{n_0}$

மேலும் $S_k < S'''$ $S_{n_0} < S'''$

k-ன் மதிப்பு அதிகமாக ஆக, m_0-ம் n_0-ம் அதிகமாகின்றன.

$\therefore \quad S_{m_0}$-ம் S_{n_0}-ம் கூட அதிகமாகின்றன.

$\therefore \quad S_{m_0}$-ம் S_{n_0}-ம் மேல் வரம்புள்ள ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசைகளின் மாதிரி உறுப்புகள்.

$$\therefore \lim_{k\to\infty} S_{m_0} = S', \quad \lim_{k\to\infty} S_{n_0} = S''$$

$S_k = S_{m_0} - S_{n_0}$ என்பதால்

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = S' - S''$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் உறுப்புகளின் வரிசையை எவ்விதமாய்க் கலைத்தாலும் S', S'' இவற்றின் மதிப்புக்கள் மாருது. ஏனெனில் இவ்விரு தொடர்களின் உறுப்புகள் எல்லாம் நேராக இருப்பன. $\therefore$ எந்த விதமாக நாம் $\sum u_n$-ன் உறுப்புகளின் வரிசையை மாற்றியமைத்தாலும், கிடைக்கும் தொடரின் தொகை எப்போதுமே $S' - S''$.

தேற்றம் 3

"அபெல்"-ன் துணைத் தேற்றம் (Abel's Lemma)

$\{u_r\}$ என்பது நேர் எண்களைக் கொண்ட ஒழுங்கு வரிசை என்றும், எல்லா r-க்கும் $u_r \geqq u_{r+1}$ என்றும் கொள்க. மேலும் மெய் யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஒழுங்கு வரிசை யானது

$$\lambda < \sum_{r=1}^{p} a_r < \mu, \quad p=1, 2, 3, \ldots, n \text{ என்றவாறிருக்கட்டும்.}$$

அப்படியானால், $\lambda u_1 < \sum_{r=1}^{n} a_r u_r < \mu u_1$

நிறுவல்

$$s_p = \sum_{r=1}^{p} a_r \text{ என்க}$$

$$\therefore a_r = s_r - s_{r-1}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r u_r = \sum_{r=1}^{n} (s_r - s_{r-1}) u_r,$$

$$= (s_1 - s_0) u_1 + (s_2 - s_1) u_2 + (s_3 - s_2) u_3 + \ldots + (s_n - s_{n-1}) u_n$$

$$= s_1 u_1 + (s_2 - s_1) u_2 + (s_3 - s_2) u_3 + \ldots + (s_r - s_{n-1}) u_n, \because s_0 = 0$$

$$= s_1(u_1 - u_2) + s_2(u_2 - u_3) + \ldots + s_{n-1}(u_{n-1} - u_n) + s_n u_n$$

$$\because u_r \leqq u_{r+1}, \therefore u_r - u_{r+1} \leqq 0, \forall r$$

ஒவ்வொரு r-க்கும், $\max s_r = \lambda$

$\therefore$ $s_1, s_2, \ldots . s_n$-க்குப் பதில் λ-ஐப் பிரதியிட்டால்,

$\sum_{r=1}^{n} a_r u_r$-ன் மீப் பெரிய மதிப்பு கிடைக்கின்றது.

$$\therefore \max \sum_{r=1}^{n} a_n u_n = \lambda (u_1 - u_2) + \lambda(u_2 - u_3) + \ldots + \lambda u_n$$

$$= \lambda (u_1 - u_2 + u_2 - u_3 + \ldots + u_n) = \lambda u,$$

அதுபோல் s-களுக்குப் பதில் μ-ஐப் பிரதியிட்டால், $\sum_{r=1}^{n} a_r u_r$-ன் மீச் சிறிய மதிப்பு கிடைக்கின்றது.

$$\therefore \min \sum_{r=1}^{n} a_r u_r = \mu(u_1 - u_2) + \ldots + \mu u_n = \mu u_1,$$

$$\therefore \lambda u_1 < \sum_{r=1}^{n} a_r u_r < \mu u_1$$

$M = \max (| \lambda |, | \mu |)$ என்றால்

$$\left| \sum_{r=1}^{p} a_r \right| < M, \; p = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\left| \sum_{r=1}^{n} a_r u_r \right| < M u_1$$

தேற்றம் 4

அபெல் சோதனை (Abel's Test)

$\sum a_n$ என்பது ஒருங்கும் தொடரென்றும், $\{v_n\}$ என்பது வரம்புள்ள ஒரே முறை ஒழுங்கு வரிசை என்றும் கொள்க. அப்படியானால் எல்லா n-க்கும் $\sum a_n v_n$ ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

$\{v_n\}$ ஆனது வரம்புள்ள ஒரே முறை ஒழுங்கு வரிசை என்பதால் $\{v_n\}$ ஆனது ஒருங்குகிறது. அதாவது $\lim_{n\to\infty} v_n$ இருக்கிறது. இதனை l என்க.

$\{v_n\}$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என்றால் $u_n = l - v_n$ என்க. அப்படியின்றி, $\{v_n\}$ ஒரேமுறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை என்றால், $v_n = v_n - l$. எவ்விதமாயினும் $\{v_n\}$ என்பது எல்லா n-க்கும் $u_n \geqq u_{n+1}$ என்றவாறமைந்த ஒழுங்கு வரிசை ஆகும். மேலும்

$\lim_{n\to\infty} u_n = l - \lim_{n\to\infty} v_n$ அதாவது, $l-l=0$,

அல்லது, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n - l$ அதாவது $l-l=0$,

எப்படியும், $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

இப்போது, $\sum a_n v_n = \sum a_n (l-u_n)$, $\sum u_n$ ஆனது ஒரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை என்றால்

மறுபடியும், $\sum a_n v_n = \sum a_n (l+u_n)$, $\sum u_n$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை எனில்

மேலும் $\sum la_n = l\sum a_n$ இது ஒருங்குகிறது, ஏனெனில் $\sum a_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\therefore$ $\sum a_n v_n$-ன் ஒரு பகுதி ஒருங்குகிறது. $\therefore$ மற்றொரு பகுதியான $\sum a_n u_n$ ஒருங்குகிறது எனக் காண்பித்தால், $\sum a_n v_n$ ஆனது ஒருங்க்குகிறது எனலாம்.

$$\left| \sum_{n=m+1}^{n=m+p} a_n u_n \right| < \epsilon,\ \epsilon > 0,\ p \text{ ஒரு நேர் எண்},$$

என்றவாறு $m\epsilon$ என்ற நேர் எண் இருக்கிறது எனக் காண்பித்தால், கோஷியின் ஒருங்கல் பொதுவிதிப்படி,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது என முடிவு செய்யலாம்.

$\left| \sum_{r=m+1}^{m+v} a_n \right|$, $v=1,2,3, \ldots p$ என்ற தொகைகளின் மீப் பெரிய மதிப்பு M என்க.

அபெல் கிளைத் தேற்றத்தின் படி,

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n u_n \right| < M u_{m+1} < M u_1 \quad \because \quad u_n \geq u_{n+1}$$

$\sum a_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது என்பதால்

$$\left| \sum_{n=m+1}^{n=m+p} a_n \right| < \frac{\varepsilon}{u_1}, \text{ ஒவ்வொரு நேர் முழுஎண் } p\text{-க்கும்}$$

ஆனால் $M = \max \left| \sum_{n=m+1}^{n=m+v} a_n \right|$ என்பதால்

$M < \frac{\varepsilon}{u_1}$, அதாவது $Mu_1 < \epsilon$

$\therefore \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n u_n \right| > \varepsilon$, ஒவ்வொரு நேர் முழு எண் p-க்கும்

$\therefore$ கோஷியின் ஒருங்கல் பொதுவிதிப்படி, $\sum a_n u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\therefore \sum a_n v_n$ ம் ஒருங்குகிறது.

4·25. "டிரிஷ்லே"-யின் சோதனை (Dirichlet's Test)

$\sum a_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது என்றோ முடிவுள்ள எல்லைகளுக்கு நடுவே அலைகிறது என்றோ கொள்க.

$\{u_n\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் தொடரென்றும்,

$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ என்றும் கொள்க. அப்படியானால், $\sum a_n u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

எப்படியாயினும், முடிவுள்ள எல்லைகளுக்கு நடுவே இருப்பதால்,

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| < M, \text{ (எல்லா நேர் முழு எண்கள் } m, p\text{-க்கும்)}$$

என்றவாறு M என்ற மாறிலி எண் உள்ளது.

அபெல் துணைத் தேற்றத்தின்படி, $\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n u_n \right| < M u_{m+1}$

$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ என்பதால், $u_{m+1} < \frac{\varepsilon}{M}$ என்றவாறு ஒரு நேர் முழு எண் m_ϵ இருக்கிறது.

$\therefore \left| \sum_{n=m+1}^{n=m+p} a_n u_n \right| < \varepsilon$, ஒவ்வொரு நேர் முழு எண் p-க்கும்.

$\therefore \sum a_n u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

வரை இலக்கணம்

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ ஆனது விரிந்து $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஒருங்கினால் $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$-ஐ "நிபந்தனைக்குட்பட்ட குவியுந் தொடர்" (நி.கு.தொ.) அல்லது "நிபந்தனைக்குட்பட்ட ஒருங்கும் தொடர்" (Conditionally Convergent Series) என்போம்.

4·26. ஆடல் தொடர் (Alternating Series)

ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் மாறி மாறி ஒன்றுவிட்டு ஒன்று நேர், குறை என்றால் அத்தொடரை "ஆடல் தொடர்" என்போம்.

தேற்றம்

லீப்னிட்ஸ் சோதனை (Leibnitz's Test)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \equiv u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

என்பது ஆடல் தொடர் என்க.

(i) $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$

(ii) $\{u_n\} \to 0$

என்றால் $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ஒருங்குகிறது.

முதல் நிறுவல்

டிரிஷ்லே (4·25-ஐக் காண்க) சோதனையைப் பயன்படுத்தி இத்தேற்றத்தை நிறுவுவோம்.

$a_n = (-1)^{n-1}, \forall n$ என்றால்

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \text{ (மு.வ.)}$$

$\therefore$ இத்தொடர் 0-க்கும் 1-க்கும் இடையே அலைகிறது.

$\therefore$ டிரிஷ்லே சோதனையின் நிபந்தனைகள் நிறைவேற்றப் பட்டன.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \text{ ஒருங்குகிறது.}$$

மற்றொரு நிறுவல்

முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை s_n என்க. n இரட்டை எண் என்றால்

$$\text{(i)}\quad s_n = (u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{n-1}-u_n)$$

$$\text{(ii)}\quad s_n = u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{n-2}-u_{n-1})-u_n$$

$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$ என்பதால் (i)-ல் அடைப்புகளிலிருக்கும் தொகைகள் யாவும் நேர் எண்களே.

$\therefore$ n ஆனது நேர் இரட்டை எண்களாகப் பெருகும்போது (as n increases through even integers), $\{s_n\}$ ஆனது ஓரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

s_n ஆனது நேர் எண்.

$\therefore$ (ii)-லிருந்து, $s_n < u_1$ (n இரட்டை எண்)

$\therefore$ $\{s_n\}$ ஆனது மேல் வரம்புள்ள ஓரே முறை ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

$\therefore$ $\{s_n\}$ ஆனது ஒரு எல்லைக்கு ஒருங்குகிறது.

n ஆனது இரட்டையானதால், $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = l$ என்றெழுதலாம்.

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + 0 \quad \because \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ ஆனது ஒருங்குகிறது.}$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = l = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

$\therefore$ n ஆனது இரட்டையானாலும், ஒற்றையானாலும், $\sum(-1)^n u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

4·27. ஆடற்றொடரை ஒட்டிய கணக்குகள்

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$

(i) இது ஒரு ஆடற்றொடர்.

(ii) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}=0$

∴ லீப்னிட்ஸ் சோதனைப்படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒருங்குகிறது.

2. $\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}n^{-p}$

பல செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் உண்டு.

(அ) $|(-1)^{n-1}n^{-p}|=n^{-p}$

$p>1$ என்றால், $\sum n^{-p}$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-p}$ ஆனது அற ஒருங்குந் தொடர்.

(ஆ) $p=1$ என்றால் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஆனது

$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}n^{-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ என்றாகிறது.

மேற்கண்ட கணக்கு (1)-ன் படி, இத்தொடர் ஒருங்குகிறது.

ஆனால் $\sum_{n=1}^{n=\infty}|(-1)^{n-1}n^{-1}|=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ இது விரிகிறது.

$\therefore \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}n^{-1}$ ஆனது நிபந்தனைக்குட்பட்ட குவியுந் தொடர்.

(இ) $0<p<1$ என்க. $\sum(-1)^{n-1}n^{-p}=\sum(-1)^{n-1}u_n$ என்க.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{-p}}{n^{-p}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}$$

$p>0$ என்பதால் $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p>1$

$\therefore \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \therefore u_{n+1} < u_n$

மேலும் $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0 \quad \because p > 0$

∴ லீப்னிட்ஸ் சோதனைப்படி, $\sum(-1)^{n-1} u_n$ ஆனது ஒருங்கு கிறது.

ஆனால் $\sum |(-1)^{n-1} n^{-p}| = \sum n^{-p}$ இது $0 < p < 1$-க்கு விரிகிறது.

$\therefore \sum(-1)^{n-1} n^{-p}$ ஆனது நிபந்தனைக்குட்பட்ட குவியுந்தொடர்.

(ஈ) $p = 0$ என்க.

$$\sum(-1)^{n-1} n^{-p} = \sum(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

இத்தொடர் 0-க்கும் 1-க்கும் இடையே அலைகிறது.

(உ) $p > 0$ என்றால் $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-p} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = \infty$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முடிவற்றதாய் அலைகிறது.

3. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{4} + \ldots$

இதனை $\sum(-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}\sqrt{n} = \sum(-1)^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ என்றும் எழுதலாம்.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$u_n > u_{n+1} \quad \because \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

மேலும் $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

∴ லீப்னிட்ஸ் சோதனைப்படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒருங்குகிறது.

4. $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots$

இதனை $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ என்றும் எழுதலாம்.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ இது ஒருங்கும் தொடர்.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ ஆனது அற ஒருங்குந் தொடர்.

"ஒரு அற ஒருங்குந் தொடர் ஒருங்குகிறது" என்ற தேற்றத்தின்படி கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒருங்குகிறது. இதனை லீப்னிட்ஸ் சோதனையைக் கொண்டும் செய்யலாம்.

5. $x - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} - \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} x^n + \ldots$

$$u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{x^n}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+1}}{x^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}$$

(i) $x = 1$ என்க.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} > 1$$

$\therefore u_n > u_{n+1}$

$x = 1$க்கு, $\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\therefore$ லீப்னிட்ஸ் சோதனைப்படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒருங்குகிறது.

(ii) $x < 1$ என்க. $\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 \quad \therefore u_n > u_{n+1}$

$x < 1$க்கு $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{y^n \sqrt{n}}$, $\left(x = \frac{1}{y} \text{ என்றால், } y > 1 \right)$

3·10 (9)-ன்படி, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{y^n \sqrt{n}} = 0$

$\therefore$ லீப்னிட்ஸ் சோதனைப்படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடர், $x<1$-க்கு ஒருங்குகிறது.

(iii) $x>1$ என்க.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (தேராக்கணியம்)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n \log x}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} \text{ (லோபிதால் விதி)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}\, x^n \log x = \infty \neq 0$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n \pm 0$, $\therefore \sum(-1)^n u_n$ ஆனது ஒருங்கவில்லை. ஆனால் முடிவில்லாமல் அலைகிறது.

6. $\frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \frac{x^4}{1+x^4} + \ldots (0<x<1)$

இதனை $\sum(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+x^n}$

$$u_n = \frac{x^n}{1+x^n} > 0 \quad \because x>0$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{x^n}{1+x^n} - \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} = \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}$$

$$= \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} > 0 \ (\because 0<x<1)$$

$\therefore u_n > u_{n+1}.\ \forall n.$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{y^n}}{1+\frac{1}{y^n}} \quad \left(x = \frac{1}{y}, y>1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y^n+1} = 0$$

$\therefore$ லீப்னிட்ஸ் சோதனைப்படி கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒருங்குகிறது.

7. $\{u_n\}$ ஆனது இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை என்றும், $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ என்றும் கொண்டால், $u_1-\frac{1}{2}(u_1+u_2)+\frac{1}{3}(u_1+u_2+u_3)-$ . . . (மு.வ.) என்ற தொடர் ஒருங்குகிறது என நிறுவுக.

நிறுவல்

கொடுக்கப்பட்ட தொடரை $\sum(-1)^{n-1}a_n$ என்று எழுதுக.

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{n}(u_1+u_2+\ .\ .\ .\ +u_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\ .\ .\ .\ +u_n}{n}=\lim_{n\to\infty}u_n \quad \text{(பார்க்க அத்தியாயம் 3)}$$

$$=0$$

மேலும் $u_1>u_2>u_3>\ .\ .\ .$ எனக் கொடுத்திருப்பதால்

$u_1+u_1=2u_1>u_1+u_2$ அதாவது $u_1>\frac{1}{2}(u_1+u_2)$

$$3(u_1+u_2)=(u_1+u_2)+2(u_1+u_2)>u_3+u_3+2(u_1+u_2)$$
$$=2(u_1+u_2+u_3)$$

(அதாவது) $\frac{1}{2}(u_1+u_2)>\frac{1}{3}(u_1+u_2+u_3)$

. . . .

$$\therefore\ u_1>\frac{u_1+u_2}{2}>\frac{u_1+u_2+u_3}{3}>\ .\ .\ .$$

$$\therefore\ a_1>a_2>a_3>\ .\ .\ .$$

$\therefore\ \{a_n\}$ என்பது ஒரே முறை இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை; $\{a_n\}\to 0$.

$\therefore$ லீப்னிட்ஸ் சோதனைப்படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒருங்குகிறது.

4·28. அடுக்குத் தொடர் (Power Series)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ .\ .\ .\ +a_nx^n+\ .\ .\ .$ என்ற மாறி x-ன் அடுக்குகளைக் கொண்ட முடிவில்லாத் தொடருக்கு "அடுக்குத் தொடர்" என்று பெயர். மாறிலிகள் $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ என்பவை

அடுக்குத் தொடரின் "கெழுக்கள்" (coefficients) எனப்படுவன. இக் கெழுக்கள் நேராகவோ, குறையாகவோ, பூச்சியமாகவோ இருக்கலாம். இக்கெழுக்கள் மேலும், x-ஐச் சாராதவை (independent).

மிக முக்கியமான நமக்குத் தெரிந்த சில அடுக்குத் தொடர் களாவன : ஈருறுப்புத் தொடர் (binomial series), அடுக்குக் குறித் தொடர் (exponential series), மடக்கைத் தொடர் (logarithmic series) முதலியன.

அடுக்குத் தொடரில் x-ன் சில மதிப்புகளுக்கு அத்தொடர் ஒருங்கும், வேறு சில மதிப்புகளுக்கு விரியும்.

தேற்றம் 1

$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ என்பது $x=x_0$-க்கு ஒருங்கட்டும்;

$x=x_1$ 1-க்கு விரியட்டும். அப்படியானால்

(i) $|x| < |x_0|$ க்கு, $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ அற ஒருங்குகிறது.

(ii) $|x| > |x_1|$ க்கு, $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ விரிகிறது.

நிறுவல்

(i) $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x_0^n$ ஒருங்குகிறது என்றும், $|x| < |x_0|$, $x_0 \neq 0$

என்றும் கொள்க, $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x_0^n$ ஒருங்குவதால், $\{a_n x_0^n\} \to 0$.

அதாவது $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ $\therefore$ $\{a_n x_0^n\}$ ஆனது வரம்புள்ளது.

$\therefore$ எல்லா n-க்கும், $|a_n x^n| \leq K$ என்றவாறு ஒரு மெய்யெண் K இருக்கிறது.

$\therefore$ எல்லா n-க்கும், $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$

$\because |x| < |x_0|$ அதாவது $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1,$

$\sum_{n=0}^{n=\infty} K \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ என்ற முடிவில்லாத் தொடர் ஒருங்குகிறது.

$\therefore$ ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்படி $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ ஆனது அற ஒருங்குகிறது.

(ii) $|x| > |x_1|$ என்பதற்கு $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ஒருங்குகிறது என்றால்

(i)-ன் படி $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x_1^n$ ஆனது அற ஒருங்குகிறது. இது தேற்றத்தின் தற்கோளுக்கு எதிர்மறை. $\therefore$ $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ ஆனது விரிகிறது.

தேற்றம் 2

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற அடுக்குத் தொடர் $|x| < \lambda$-க்கு $f(x)$-க்கு ஒருங்கட்டும். வேண்டுமானால் $x=0$-ஐத் தவிர வேறெந்த x-க்கும் $f(x)$ ஆனது 0 ஆகாது. x-ன் இடைவெளி ஒன்று $(-\lambda, \lambda)$-க்குள் இருக்கிறது.

நிறுவல்

$|x_0| < \lambda$ என்றவாறு x-ன் ஒரு மதிப்பு x_0 என்க.

$|x_0| = r_0$, $|x| = r < r_0$ என்க.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$-ல் பூச்சியமற்ற முதல் கெழு a_k என்க.

ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது பூச்சியமாகாது என்று காண்பிக்க, அவ்விடை வெளியின் எல்லாப் புள்ளிகளிடத்து $|f(x)| > 0$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

$f(x) = a_k x^k + g(x)$ என்றால், $g(x) = a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^{k+2} + \ldots$

$|g(x)| = |a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^{k+2} + \ldots|$

$$= \left| a_{k+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{k+1} x_0^{k+1} + a_{k+2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{k+2} x_0^{k+2} + \ldots \right|$$

$$\leqq \left| a_{k+1}x_0^{k+1} \right| \left| \frac{x}{x^0} \right|^{k+1} + \left| a_{k+2}x_0^{k+2} \right| \left| \frac{x}{x_0} \right|^{k+2} + \ldots$$

$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x_0^n$ ஒருங்குவதால் $\lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$

$\therefore \ |a_n x_0^n| < M, \forall r$

$$\therefore \ |g(x)| \leqq M\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k+1} + M\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k+2} + \ldots$$

$$\therefore \ |g(x)| \leqq M\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k+1} \left\{ 1 + \frac{r}{r_0} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \ldots \right\}$$

அதாவது $\leqq M\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k+1} \frac{1}{1-\frac{r}{r_0}}$ (அடைப்புக்களில் இருப்பது பொது விகிதம்.

$0 < \frac{r}{r_0} < 1$ என்றவாறு உள்ள பெருக்குத் தொடர்.)

$$\therefore |g(x)| \leqq M \frac{r^{k+1}}{r_0^k} \cdot \frac{1}{r_0 - r}$$

$f(x) = a_k x^k + g(x)$ என்பதால்,

$$|f(x)| \geqq |a_k x^k| - |g(x)| \geqq |a_k| r^k - \frac{Mr^{k+1}}{r_0^k(r_0 - r)}$$

$x \neq 0$ என்க. $\therefore r > 0$

$\therefore \ |f(x)| > 0$ என்று காண்பிக்க,

$|a_k| r^k - \frac{Mr^{k+1}}{r_0^k(r_0 - r)} > 0$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

$r > 0, \ r_0 > 0, \ r_0 - r > 0$ என்பதால்

$|a_k| (r_0 - r) r_0^k - Mr^{k+1} > 0$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

(அதாவது) $|a_k| (r_0 - r) r_0^k - Mr > 0$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

(அதாவது) $r(M+|a_k|r_0^k)<|a_k|r_0^{k+1}$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

இப்போது $0<Ar_0$

$|a_k|r_0^{k+1}<Ar_0+|a_k|r_0^{k+1}=(A+|a_p|r_0^k|r_0)$

அதாவது $\dfrac{|a_k|r_0^{k+1}}{A+|a_k|r_0^k}<r_0 \quad \therefore r\overline{\left|\dfrac{|a_k|r_0^{k+1}}{A+|a_k|r_0^k}\right|}r_0$

$\therefore \quad r(A+|a_p|r_0^k)<|a_p|r_0^{k+1}$

$\therefore \quad |x|=r<\left\{\dfrac{|a_k|r_0^{k+1}}{A+|a_k|r_0^k}\right\}$ என்றால், $|f(x)|>0$

$\therefore \quad x=0$ என்றால்தான் $f(x)=0$.

தேற்றம் 3

இரு அடுக்குத் தொடர்கள் $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$, என்பவை $|x|<\lambda$-க்கு ஒருங்கட்டும். $|x|<\mu$ என்றவாறு உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிடத்து $\sum a_n x^n=\sum b_n x^n$ என்றால், $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $\because a_n=b_n \ldots$ இரு அடுக்குத் தொடர்களும் முற்றிலும் ஒன்றே (identical).

நிறுவல்

$f(x)=\sum a_n x^n$, $g(x)=\sum b_n x^n$ என்றெழுதுக.

இரு தொடர்களும் $|x|<\lambda$-க்கு ஒருங்குவதால்,

$f(x)-g(x)=\sum (a_n-b_n)x^n$, $|x|<\lambda$.

$|x|<\mu$-க்கு $\sum a_n x^n=\sum b_n x^n$

(அதாவது) $\sum (a_n-b_n)x^n=0$, $|x|<\nu$-க்கு $\nu=\min(\lambda\,\mu)$

$c_n=a_n-b_n$ என்றெழுதுக.

$-\nu_1<x<\nu_1 \quad (0<\nu_1<\nu)$ என்ற இடைவெளியில் எங்கும்

வேண்டுமானால் $x=0$-ஐத்தவிர, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ பூச்சியமாகாது.

(தேற்றம் 2)

$x=0$ என்றால் $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ என்பது c_0 என்றாகிறது.

$f(0)=g(0)$ என்பதால், $c_0=0$ அதாவது $a_0=b_0$

$x\neq 0$ என்றால், $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n=0,\ 0<|x|<v_1$

அப்படியானல் எல்லா கெழுக்கள் c_n-ம் பூச்சியமாகின்றன.

$\therefore\ a_n=b_n,\ \forall n.$

வரை இலக்கணம்

ஒருங்கல் ஆரையும், ஒருங்கல் இடைவெளியும் (Radius of Convergence and Interval of Convergence)

$\sum_{n=0}^{\infty} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற அடுக்குத் தொடரை எடுத்துக் கொள்க.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ இருக்குமாஞல் அதை $\frac{1}{R}(\neq 0)$ என்க.

அப்போது $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ |x|$ (முதல் உறுப்பை நீக்க)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{R}\cdot|x|$$

$\therefore$ தலம்பேரின் விகித சோதனைப்படி,

$|x|<1$ அதாவது $|x|<R$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது. $\frac{|x|}{R}>1$ (அதாவது) $|x|>R$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

$|x|=R$ தலம்பேரினல் யாது பயன்? ஒன்றுமில்லையே! நேர் மெய்யெண் R-க்கு அடுக்குத் தொடரின் ஒருங்கல் ஆரை என்று பெயர். திறந்த இடைவெளி $(-R.R)$-க்கு அதாவது $-R<x<R$க்கு அடுக்குத் தொடரின் ஒருங்கல் இடைவெளி அல்லது அற ஒருங்கல் இடைவெளி என்று பெயர். $x=R$,

$x=-R$ என்ற புள்ளிகளுக்கு ஒருங்கல் இடைவெளியின் முனைப் புள்ளிகள் (end points) என்று பெயர். அடுக்குத் தொடரானது ஒரு முனைப் புள்ளியிடத்தாவது இரு முனைப் புள்ளிகள் இடத்தாவது ஒருங்கலாம்; அல்லது எந்த முனைப் புள்ளியிடத்தும் ஒருங்காமல் இருக்கலாம். ஏனெனில் தலம்பேரை உபயோகித்து இம்முனைப் புள்ளிகளைப் பற்றி ஒரு முடிவும் எடுக்கமுடியவில்லை.

$\frac{1}{R}=0$ அதாவது $R=\infty$ என்றால், அடுக்குத் தொடர் எல்லா மெய்யெண்கள் x-க்கும் ஒருங்குகிறது. இப்போது முடிவில்லாத ஒருங்கல் ஆரை என்கிறோம்; ஒருங்கல் இடைவெளி $-\infty<x<\infty$ என்றாகிறது.

தலம்பேருக்குப் பதில் கோஷியின் விகித மூலச்சோதனையை ஒருங்கல் ஆரையைக் கண்டுபிடிக்கப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணங்கள்

(1) அடுக்குக் குறித் தொடர் (Exponential Series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 \text{ (முதல் உறுப்பை நீக்க)}$$

$$<1$$

$\therefore$ தலம்பேரின்படி எல்லா x-க்கும் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் அற ஒருங்குகிறது.

$\therefore$ அடுக்குக் குறித் தொடரின் ஒருங்கல் ஆரை ∞ ஆகும்.

(2) மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|-\frac{x_n}{n+1}\right| = |x|\left(\frac{n}{n+1}\right) = |x| \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$$

தலம்பேரின்படி, $|x| < 1$ என்ருல் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் அற ஒருங்குகிறது.
$|x| > 1$ என்ருல் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் விரிகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட அடுக்குத் தொடரின் ஒருங்கல் ஆரை$=1$.

(3) ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series)

$n_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ என்ருல்

$$1 + \frac{n_1}{1!}x + \frac{n_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n_r x^r}{r!} + \ldots \text{ (மு. வ.) என்பது}$$

ஈருறுப்புத் தொடர் எனப்படும்.

இத்தொடரை $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ என்றெழுதினுல்

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{\dfrac{n_r}{r!}x^r}{\dfrac{n_{r-1}}{(r-1)!}x^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}\,x$$

$$\left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right| = \left|\frac{n-r+1}{r}\right| |x|$$

$$= \left|\frac{n+1}{r} - 1\right| |x|$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_{r+1}}{u_r} = |x|$$

$\therefore$ தலம்பேரின்படி, $|x| < 1$ என்ருல் $\sum u_n$ ஆனது அற ஒருங்குகிறது.
$|x| > 1$ என்ருல் $\sum u_n$ விரிகிறது.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் ஒருங்கல் ஆரை$=1$.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

(A) கீழ்க்காணும் முடிவில்லாத் தொடர்களின் தன்மையை ஆராய்க:

(1) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3}{2\cdot3\cdot4}+\frac{5}{3\cdot4\cdot5}+\frac{7}{4\cdot5\cdot6}+\cdots$

(2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$

(3) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}+\cdots$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^p(b+n)^q}$

(5) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots$

(6) $\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+2^{-n})}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-x^2}}$

(9) $\frac{(1+a)\ (1+b)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{(2+a)\ \ (2+b)}{2\cdot3\cdot4}+\cdots$

$$+\frac{(n+a)\ \ (n+b)}{n(n+1)\ \ (n+2)}+\cdots$$

(10) $\frac{1^3}{2^m}+\frac{2^3}{1^m+3^m}+\frac{3^3}{2^m+4^m}+\frac{4^3}{3^m+5^m}+\cdots$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2+(n-1)^2}$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$

(13) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}\right)$

(14) $\sum_{n=1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}\right)$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{np}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)$

(18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+10n}{n^3}$

(B) கீழே கொடுக்கப்பட்டவைகளை n-வது உறுப்புகளாகக்கொண்ட முடிவில்லாத தொடர்களின் தன்மையை ஆராய்க:

(21) $\frac{1}{an+1}$

(22) $\frac{1}{1+an^4}$

(23) $\frac{1}{n^2-1}$

(24) $\frac{n^p}{(n+1)^q}$

$\left(\text{குறிப்பு } v_n=\frac{1}{n^{q-p}}\right)$

(25) $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

(குறிப்பு

$$v_n=\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$$

(26) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$

(குறிப்பு

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\neq 0$$

$\therefore \sum u_n$ விரிகிறது.)

(27) $\sqrt{\dfrac{n}{(n+1)^3}}$

(குறிப்பு

$$v_n=\frac{1}{n}\Big)$$

(28) $\dfrac{1}{an+b}$

(29) $\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+(3/2)}}$

(30) $\sin\dfrac{\alpha}{n}$ $\left(\text{குறிப்பு} \quad \sin\dfrac{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha}{n}-\dfrac{\alpha^3}{(3)!n^3}+\ldots \quad v_n=\dfrac{1}{n}\right)$

(31) $\cos\dfrac{1}{n}$ $\left(\text{குறிப்பு} \quad \cos\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{2\,!}\dfrac{1}{n^2}+\ldots \quad v_n=1\right)$

(32) $\tan^{-1}\dfrac{\alpha}{n}$ $\Big(\text{குறிப்பு} \quad \tan^{-1}\dfrac{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha}{n}-\dfrac{\alpha^3}{3n^3}+\ldots$

க்ரெகரி (Gregory) தொடர். $v_n=\dfrac{1}{n}\Big)$

(33) $\sin^2\dfrac{1}{n}$ $\left(\text{குறிப்பு} \quad v_n=\dfrac{1}{n^2}\right)$

(34) $\frac{1}{\sqrt{n}} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ (குறிப்பு $v_n = \frac{1}{n^{3/2}}$)

(C) கீழ்க்கண்ட தொடர்களை ஒருங்கலுக்காகச் சோதிக்க :

(35) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^3+1}{2^n+1}\right)$

(36) $\frac{1}{4} + \frac{1\cdot3}{4\cdot7} + \frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot7\cdot10} + \cdots$

(37) $1 + \frac{2^3}{2\,!} + \frac{3^3}{3\,!} + \frac{4^3}{4\,!} + \cdots$

(38) $1 + \frac{2^p}{2!} + \frac{3^p}{3\,!} + \frac{4^p}{4\,!} + \cdots$

(39) $\frac{3}{4} + \frac{3\cdot4}{4\cdot6} + \frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8} + \cdots$

(40) $1 + \frac{2^2}{2\,!} + \frac{3^2}{3\,!} + \frac{4^2}{4\,!} + \cdots$

(41) $1 + \frac{\alpha+1}{\beta+1} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)(3\beta+1)} + \cdots$

(42) $\frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2\,!} + \frac{4^2}{3\,!} + \cdots$

(43) $\frac{2(1)!}{1} + \frac{4(2)!}{4} + \frac{8(3)!}{27} + \cdots$

(குறிப்பு $u_n = \frac{2^n(n)!}{n^n}$)

(44) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n\,!}$

(45) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2^n-1}{3^n-1}}$

(46) $\sum \left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{9^{n-1}}$

(D) கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க :

(47) $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$

[குறிப்பு : $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{x}$

$x<1$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$x>1$-க்கு $\sum u_n$ விரிகிறது.

$x=1$-க்கு $\sum \frac{1}{n^{-2}}$ விரிகிறது.]

(48) $\sum_{1}^{\infty} \frac{5n^6+11n^4}{6n^{12}+14}x^n$

(49) $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}\cdot x+\frac{1}{5^p}x^2+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^p}x^n+\cdots$

(50) $\sum \frac{2n}{n^2+1}\cdot x^n \quad (x>0)$

(51) $\frac{1}{2}x^2+\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{4}x^4+\cdots$

(52) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)x^n$

(53) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+k}{2^n+k}\right)x^n$

(54) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

(55) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x+n}$

(56) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$

(57) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$

(58) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n^2+1)(n^2+2)} (x>0)$

(59) $1+\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots$

(60) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

(61) $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots$

(62) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} x^n (x>0)$

(63) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$

(64) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\ (n+2)} x^n$

(65) $\frac{1}{1+a}+\frac{a}{1+a^2}+\frac{a^2}{1+a^3}+\ldots$

(66) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{2^n+1} x^n$

(67) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}} x^n \ (x>0)$

(68) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+nx^n}$

(விடை: $\frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{1+nx^n}{1+(n+1)x^{n+1}} = \frac{\frac{1}{nx^n}+1}{\frac{1}{nx^n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)x}$

x > 1 என்றால் $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{x} < 1 \quad \therefore \sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

x < 1 என்றால் $1+x<2,\ 1+2x^2<3,\ 1+3x^3<4, \ldots$

$\therefore \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2+x^2}+\ldots > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$

வலதுபுறத்துத் தொடர் விரிகிறது. ∴ இடது பக்கத் தொடரும் விரிகிறது.

$x=1$ என்றால் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

இது விரியும் தொடர்.)

(69) $2x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{4}{27}x^3 + \cdots$

(70) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\; x^n}{n^2-1}$

(71) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n-1}{a^n+1}\, x^n$

(விடை : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{1}{a^n}}{1-\frac{1}{a^n}} \cdot \frac{1-\frac{1}{a^{n+1}}}{1+\frac{1}{a^{n+1}}} \cdot x$

$a>1, \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$

$x>1$, $\sum u_n$ விரிகிறது.

$x>1$, $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$x=1, \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{a^n}}{1+\frac{1}{a^n}} = 1 \neq 0$ ∴ $\sum u_n$ விரிகிறது.

$a<1$, $v_n = x^n$ என்றால் $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = -1 \neq 0$, $\left(\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0,\right.$ $\because a<1)$

$\sum v_n = \sum x^n$ ஆனது $\begin{cases} x<1 \text{ என்றால் ஒருங்குகிறது.} \\ x>1 \text{ என்றால் விரிகிறது.} \end{cases}$

∴ $\sum u_n$ ஆனது $\begin{cases} x<1 \text{ என்றால் ஒருங்குகிறது.} \\ x>1 \text{ என்றால் விரிகிறது.} \end{cases}$

$a=1$ என்றால், $u_n=0, \forall n$

∴ $a=1$-க்கு $\sum u_n$ ஆனது ஒருங்குகிறது.)

(72) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, $|x| > 1$

(73) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} x^n$

(74) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)2n}$

(75) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}\right)^2$

(76) $1+(2+3)x+(2^2+3^2)x^2+(2^3+3^3)x^3+\cdots$

(E) கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க :

(77) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log (n+1)\right]^{-\lambda}$

(விடை : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left[\frac{\log (n+2)}{\log (n+1)}\right]^{-\lambda} = \left[\frac{\log (n+1)}{\log (n+1)}\right]^{\lambda}$

$n \geqq 1$-க்கு, $\log (n+2) > \log (n+1)$ $\therefore u_{n+1} < u_n$

$\therefore \{u_n\}$ ஆனது ஒரு இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசை.

$\sum_{n=1}^{\infty} \log (n+1)^{-\lambda}$ ஐ $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{-\lambda}$ என்றும் எழுதலாம்.

இதை நம் வசதிக்காக எழுதினோம். $\therefore$ கோஷியின் ஒடுக்கல் சோதனைப்படி,

$\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\lambda}$ ம் $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \log (2^n)^{-\lambda}$ ம் ஒரே தன்மையன.

$2^n (\log 2^n)^{-\lambda} = 2^n (n \log 2)^{-\lambda} 2^n \cdot n^{-p} (\log 2)^{-\lambda}$

$(\log 2)^{-\lambda}$ என்பது மாறிலி எண்ணுதலால்,

$\sum 2^n, n^{-\lambda} (\log 2)^{-\lambda}$ ன்

தன்மையும் $\sum 2^n n^{-\lambda}$ ன் தன்மையும் ஒன்றே.

$2^n > 1$ $\forall$ நேர் முழு எண் n

$\frac{2^n}{n^\lambda} > \frac{1}{n^\lambda}$ (அதாவது) $2^n - n^{-\lambda} > n^{-\lambda}$

ஆனால் $\sum \frac{1}{n^\lambda}$ ஆனது $0 < \lambda \leq 1$க்கு விரிகிறது.

$\therefore$ ஒப்பீட்டுச் சோதனைப்படி, $\sum 2^n n^{-\lambda}$ம் $0 < \lambda \leq 1$-க்கு விரிகிறது.

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} 2^n n^{-\lambda} (\log 2)^{-\lambda} \text{ விரிகிறது.}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\lambda} \text{ம் விரிகிறது.}$$

$\lambda > 1$ என்க.

$v_n = 2^n n^{-\lambda}$ என்றால்

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)^{-\lambda}}{2^n n^{-\lambda}} = 2 \cdot \frac{n^\lambda}{(n+1)^\lambda} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2 > 1$$

$$\therefore \text{ தலம்பேரின்படி, } \sum v_n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n n^{-\lambda} \text{ விரிகிறது.}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} 2^n n^{-\lambda} (\log 2)^{-\lambda}\text{-ம் விரிகிறது.}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\lambda}\text{-ம் விரிகிறது.}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\lambda} \text{ ஆனது எப்போதும் விரிகிறது.}$$

துணை முடிவு:

$\lambda = 1$ என்றால்

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)} \text{ விரிகிறது.}$$

(78) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^2}{n^2}$

(கோஷியின் ஒடுக்கல் சோதனையைப் பயன்படுத்துக:

$$f(n)=\frac{(\log n)^2}{n^2} \text{ என்றால் } 2^n f(2^n)=2^n\frac{(\log 2^n)^2}{(2^n)^2}$$

$$=\frac{(n\log 2)^2}{2^n}=\frac{n^2}{2^n}(\log 2)^2$$

$\sum f(n)$-ம் $\sum 2^n f(2^n)$-ம் ஒரே தன்மையன.

$(\log^2)^2$ ஒரு மாறிலி என்றுதலால், $\sum \frac{n^2}{2^n}(\log 2)^2$-ம், $\sum \frac{n^2}{2^n}$ ம்

ஒரே தன்மையன.

$$v_n=\frac{n^2}{2^n} \text{ என்றால் } \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}<1.$$

$\therefore$ தலம்பேரின்படி, $\sum v_n$ ஒருங்குகிறது.

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(\log 2)^2$ ஒருங்குகிறது.

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} 2^n f(2^n)$ ஒருங்குகிறது.

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$-ம் (அதாவது) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^2}{n^2}$-ம் ஒருங்குகிறது.

(79) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{-1}}{\sqrt{\log n}}$

(குறிப்பு $\sum\frac{1}{n(\log n)^p}$ என்ற ஒப்பீட்டுத் தொடரில் $p=\frac{1}{2}$ என்று பிரதியிடுக.

$\therefore p<1$-க்கு இத்தொடர் விரிகிறது. $p=\frac{1}{2}<1$ என்பதால் கொடுத்த தொடரும் விரிகிறது.

(80) $\sum_{n=3}^{\infty}(n\log n)^{-1}(\log\log n)^{-\lambda}$

(குறிப்பு $f(n) = (n\log n)^{-1}(\log\log n)^{-\lambda}$ என்றால்

$$2^n f(2^n) = \frac{1}{n(\log n)^\lambda (\log 2)\left(1+\frac{\log\log 2}{\log n}\right)^\lambda} = w_n \text{ என்க.}$$

$v_n = \frac{1}{n(\log n)^\lambda}$ என்றால், $\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{v_n} = \frac{1}{\log 2} (\neq 0)$

$\lambda > 1$-க்கு $\sum v_n$ ஒருங்குகிறது. $\lambda \leq 1$-க்கு $\sum v_n$ விரிகிறது.

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} 2^n f(2^n)$-ம், அதனால், $\sum_{n=3}^{\infty} f(n)$-ம், $\lambda > 1$க்கு ஒருங்குகின்றன. $\lambda \leq 1$-க்கு விரிகின்றன.

(F) கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க :

(81) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \ (x > 0)$ (குறிப்பு : கோஷியின் மூலச் சோதனையைப் பயன்படுத்துக.)

(82) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(விடை: $u_n^{1/n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

கொடுத்த தொடர் கோஷியின் மூலச் சோதனைப்படி $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

(83) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \frac{n+1}{n}\right]^{-n}$

(குறிப்பு $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-1}$

$$= \frac{1}{e-1} < 1 \quad \because e > 2$$

$\therefore$ கொடுத்த தொடர் ஒருங்குகிறது.

(84) $\sum \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

(G) கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க :

(85) $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{7}+\ldots$

(86) $x^2(\log 2)^q+x^3(\log 3)^q+x^4(\log 4)^q+\ldots$

(விடை : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{n+2}}{x^{n+1}}\frac{[\log(n+2)]^q}{[\log(n+1)]^q}$

$$=x\left[\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right]^q$$

$$=x\left[1+\frac{\log(n+2)-\log(n+1)}{\log(n+1)}\right]^q$$

$$=x\left[1+\frac{1}{\log(n+1)}>\{\log(n+2)-\log(n+1)\}\right]^q$$

$$=x\left[1+\frac{1}{\log(n+1)}\log\frac{n+2}{n+1}\right]^q$$

$$=x\left[1+\frac{1}{\log(n+1)}\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]^q$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x$$

தலம்பேரின்படி $\begin{cases}x<1 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ ஒருங்குகிறது.}\\ x>1 \text{ என்றால் } \sum u_n \text{ விரிகிறது.}\end{cases}$

$x=1$ என்றால் தலம்பேர் துணைக்கு வருவாரா?

$x=1$ என்னும்போது, $u_n=[\log(n+1)]^q$

$q>0, \lim_{n\to\infty} u_n=+\infty\pm 0$, $\therefore \sum u_n$ ஆனது விரிகிறது.

$q<0$ என்க, $\therefore q=-p$, $p>0$ என்றால், $u_n=[\log(n^{+1})]^{-p}$

$\sum_{n=1}^{\infty}[\log(n+1)]^{-p}$ எப்போதும் விரியும் என கணக்கு (77)-ல் பார்த்தோம்.

(87) $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{b}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}+\ldots$

எப்போது ஒருங்குகிறது? விரிகிறது?

(விடை: $n>1$-க்கு,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)(n-1+a)}{2n(n-1+b)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$ தலம்பேர் சோதனை உபயோகப்படாது.

ராபெயின் துணையை நாட,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\lim_{n\to\infty}\frac{(2b-2a+1)+\dfrac{(a-1)}{n}}{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\left[1+\dfrac{a-1}{n}\right]}=b-a+\frac{1}{2}$$

$\therefore\ b-a+\frac{1}{2}>1$ என்றால் அதாவது $b>a+\frac{1}{2}$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்கும், $b<a+\frac{1}{2}$ என்றால் $\sum u_n$ விரியும்.)

(88) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2!)n}x^n$

(89) $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot5}\frac{x^4}{8}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\frac{x^6}{12}+\ldots$

(90) $1+a+\frac{a(a+1)}{1\cdot2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots$

(குறிப்பு $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1-a}{1+\dfrac{a}{n}}\right\}=1-a$

$1-a>1$ (அதாவது) $a<0$, என்றால் தொடர் ஒருங்குகிறது.

$1-a<1$ (அதாவது) $a>0$, என்றால் தொடர் விரிகிறது.

$1-a=1$ (அதாவது) $a=0$ என்றால் தொடர் $1+0+0+0+\ldots$ என்றாகிறது.

(இத் தொடர் ஒருங்குகிறது.)

(91) $\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\ldots$

(92) $\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{5}+\frac{3\cdot6}{4\cdot7}\frac{x^2}{8}+\frac{3\cdot6\cdot9}{4\cdot7\cdot10}\frac{x^3}{11}+\ldots$

(93) $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\ldots\quad(x>0)$

$$\left(\text{குறிப்பு :}\quad u_n = \frac{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

(H) கீழ்க்கண்ட தொடர்கள் ஒருங்குகின்றனவா என்று சோதிக்க :

(94) $x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{3^3x^3}{3!}+\frac{4^4x^4}{4!}+\ldots$

[விடை

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.x$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x\,e$$

தலம்பேரின்படி,

$xe<1$ (அதாவது) $x<\frac{1}{e}$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$xe>1$ (அதாவது) $x>\frac{1}{e}$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

$x=\frac{1}{e}$ என்னும்போது

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}=n\left[\log e-n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=n\left[1-n\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\right\}\right]$$

$$=n\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}=\tfrac{1}{2}<1$$

∴ ஷ்லோமில்∴, அதாவது மடக்கைச் சோதனைப்படி $\sum u_n$ விரிகிறது.

(95) $1+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{4^2}{5^2}+\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2}{3^2\cdot5^2\cdot7^2}+\cdots$

(விடை $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+2)^2}{(2n+3)^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ தலம்பேரினுல் பயனில்லை.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n}{4n^2+8n+4}=1$$

ராபெயினுலும் பயனில்லை.

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n=\left(\frac{-3n-4}{4n^2+8n+4}\right)\log n$$

$$=-\left\{\frac{3+\frac{4}{n}}{4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}}\right\}\frac{\log n}{n}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n=0<1$ $\therefore$ மடக்கைச் சோதனை II-ன் படி, கொடுத்த தொடர் விரிகின்றது.

(96) $\sum\frac{n!}{(n+1)^n}x^n$

(97) $\frac{(1+a)(1+b)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{(2+a)(2+b)}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$

(98) $(a+1)\frac{x}{1!}+(a+2)^2\frac{x^2}{2!}+(a+3^3)\frac{x^3}{3!}+\cdots$

(99) $1+\frac{a}{1\cdot b}x+\frac{a(a+1)^2}{1\cdot2\cdot b(b+1)}x^2+\frac{a(a+1)^2(a+2)^2}{1\cdot2\cdot3\cdot b(b+1)(b+2)}x^3+\cdots$

(100) $x+x^{1+\frac{1}{2}}+x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\cdots$

(விடை $u_n = x^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = x^{1/(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x^0 = 1$$ ∴ தலம்பேர் பயனில்லை.

$$\lim_{n\to\infty} n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n \log x^{1/(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \log \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \log \frac{1}{x} = \log \frac{1}{x}$$

$\log \frac{1}{x} > 1$ (அதாவது) $x < \frac{1}{e}$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$x > \frac{1}{e}$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.

$x = \frac{1}{e}$ என்னும்போது

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] \log n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - 1\right) \log n \left(\because x = \frac{1}{e}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{n}} \frac{\log n}{n} = 0 < 1$$

$\therefore$ $x = \frac{1}{e}$க்கு $\sum u_n$ விரிகிறது.

(I) கீழ்க்கண்ட தொடர்களைச் சோதிக்க:

(101) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+8}$

(102) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$

(103) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x+3a} + \ldots (x>0,\ a>0)$

(104) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \ldots$

(105) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \ldots$

(106) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x+n}$

(107) $(-1)^n \frac{n+1}{n}$

(108) $1-2+3-4+5-6+\ldots$

($\{u_n\}$ ஆனது ஏறுவதுடன், $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ $\therefore$ இத்தொடர் முடிவற்றதாய் அலைகிறது.)

(109) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

(110) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

(இத்தொடர் லீப்னிட்ஸ்படி ஒருங்கும் ஆடற்றொடர். மேலும் $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ என்பது விரிவதால் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் நிபந்தனைக்குட்பட்ட குவியுந் தொடர்.)

(111) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$

(112) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$

(113) $\sum (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n)$

[விடை :

$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n) = (-1)^n \cdot n\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$

$$= (-1)^n \cdot n\left[\left\{1+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{1}{n^4}+\ldots\right\}-1\right]$$

$$= (-1)^n\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+\ldots\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

மேலும் லீப்னிட்ஸ் சோதனைக்குரிய மற்ற நிபந்தனைகளை இத்தொடர் நிறைவேற்றுகிறது.

∴ கொடுத்த தொடர் ஒருங்குகிறது.]

(114) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(115) $\{u_n\}$ ஆனது இறங்கும் நேருறுப்பு ஒழுங்கு வரிசை என்றும் $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ என்றும் கொள்க. அப்படியானால் $u_1 - \frac{1}{3}(u_1+u_3)+\frac{1}{5}(u_1+u_3+u_5)+\ldots$ ஒருங்குகிறது எனக் காண்பி.

(குறிப்பு : $\frac{u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}}{2n-1} < \frac{u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}}{n}$

$\{u_n\}\to 0$ என்பதால், $\frac{u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}}{n}\to 0$

இப்போது லீப்னிட்ஸ் சோதனையைப் பயன்படுத்துக.

(116) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ என்பது $0<x\leq 1$-க்கு ஒருங்குகிறது ;

$x>1$-க்கு விரிகிறது.

(குறிப்பு : $0<x\leq 1$-க்கு, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

லீப்னிட்ஸ் சோதனைப்படி கொடுத்த தொடர் ஒருங்குகிறது.

$x > 1$ என்றால், $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{(n+1)}x > 1$

$$u_{n+1} > u_n$$

$\therefore \{u_n\}$ என்பது ஏறும் ஒழுங்கு வரிசை.

ஆனால் கொடுத்த தொடர் ஆடற்றொடர் ஆனதால் அலைகிறது.

(117) $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\log (n+1)}$

(118) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{1}{(2n-1)!} - \frac{1}{(2n)!} + \cdots$

(119) $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^2}{1+n^3}$

(120) $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(121) $\sum (-1)^n \frac{x^n}{\log (n+1)}$

(J) கீழ்க்கண்ட தொடர்களின் ஒருங்கல் ஆரைகளைக் காண் :

(121) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\ x^n$

(விடை: $\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = (n+1)\ |x|\ \ \therefore \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = +\infty\ (x \neq 0)$

> 1

$\therefore$ கொடுத்த தொடர், $x \neq 0$க்குத் தவிர, மற்றெல்லா x-க்கும் விரிகிறது.

$\therefore$ ஒருங்கல் ஆரை $=0$)

(123) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

(விடை: $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$

$\therefore$ ஒருங்கல் ஆரை $= \infty$)

(124) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (விடை: 1)

(125) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (விடை: ∞)

(126) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{(n!)^2}$ (விடை: $\frac{1}{4}$)

(127) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+2^n)\, x^n$ (விடை: $\frac{1}{2}$)

(128) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ (விடை: 4)

(129) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, x^n}{2^n+n}$ (விடை: 2)

(130) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!+1}$ (விடை: ∞)

(131) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$ $(x>0)$

(விடை

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = ex$$

$x < \frac{1}{e}$-க்கு $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$x > \frac{1}{e}$-க்கு $\sum u_n$ விரிகிறது.

$x = \frac{1}{e}$-க்கு $\log \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left[\left(n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \log n\right] = -\infty$$

$\therefore \sum u_n$ விரிகிறது.)

(132) $\sum\left[\frac{1\cdot5\cdot9\ \ldots\ (4n+1)}{3\cdot7\cdot11\ \ldots\ (4n+3)}\right]^{p}$

(விடை.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{7}{4n}\right)^{p}\left(1+\frac{5}{4n}\right)^{-p}$$

$$=\left\{1+\frac{7p}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\left\{1-\frac{5p}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

$$=1+\frac{p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

∴ கௌஸ் சோதனைப்படி

$p>2$ என்றால் $\sum u_n$ ஒருங்குகிறது.

$p<2$ என்றால் $\sum u_n$ விரிகிறது.)

(133) டிரிஷ்லேயைப் பயன்படுத்தி

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \ldots$ -ஐ ஆராய்க.

[$\{u_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $a_n=(-1)^n$ என்றால் $\sum a_n u_n$ ஒருங்குகிறது.

அதாவது $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ ஒருங்குகிறது.]

(134) $\sum\frac{1}{n}\cos n\theta$

(135) $\sum\frac{1}{n}\sin n\theta$

5. சார்புகளின் எல்லைகள்
(Limits of Functions)

5·1. முன்னுரை

சார்பு என்றால் என்ன, மாறும் எண், மாறிலி எண் என்றால் என்ன என்பனவற்றை இயற் கணிதத்தில் படித்தோம். இப் புத்தகத்தின் மூன்றாம் அத்தியாயத்தில் 'ஒழுங்கு வரிசை' என்பது ஒரு சார்பு என்று வரையறுத்தோம். இவ்வத்தியாயத்தை நன்றாக ஊன்றிப் படித்தால்தான் வரப்போகும் அத்தியாயங்களில் 'தொடர்ச்சி' (continuity), 'வகையிடல்' (differentiation) என்பன வற்றைப் பற்றி தெளிவாய் அறிந்து கொள்ள முடியும்.

5·2. மெய்மாறியின் சார்பு (Function of a Real Variable)

இப்பகுதியில் சார்பு, சார்பலன், சார்புகளின் சிலவகைகள், சார்புகளுக்கு சில உதாரணங்கள்—இவற்றைச் சுருக்கமாக இங்கே பார்ப்போம்.

R என்பது மெய்யெண்கள் கணம் என்க. $D \subseteq \mathbf{R}$ என்க. ஒவ் வொரு $x \in D$-க்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண் y-ஐ இணைக்கும் தொடர் புக்குச் சார்பு (function), f என்று பெயர். y ஐ, $y=f(x)$ என்று எழுதுவதுண்டு. ஆகையால் "சார்பு" என்பது இரு எண்களைக் குறித்த வகைப்படி இணைக்கும் தொடர்பு ஆகும்.

x என்பது D-ன் யாதாமொறு உறுப்பாவதால், x-ஐ மாறி (variable) என்போம். $D \subseteq \mathbf{R}$ என்பதால் x-ஐ மெய்மாறி என்போம். மெய்யெண்கள் y-கள் அமைக்கும் கணத்தை வீச் செல்லை (Range) கணமென்போம். D-ஐ எண் அரங்கம் (domain) என்று சொல் வதுண்டு. "$y=f(x)$" என்பதை "y-என்பது x-ன் சார்பு" (y is a function of x) என்று சொல்வது வழக்கம்.

ஆகையால்,

வரை இலக்கணம் 1

மெய்மாறியின் சார்பு (Function of a real variable) என்பது, ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் (அல்லது, மெய்மாறியையும்) ஒரே ஒரு மெய்யெண்ணோடு இணைக்கும் தொடர்பாகும். இத்தொடர்பை "ஒரு மதிப்புடைத் தொடர்பு" (single-valued relation) என்றும் கூறுவர்.

கவனிக்க வேண்டியது :

1. சில புத்தகங்களில் "ஒரு மதிப்புடைச் சார்பு" (single-valued function) என்ற சொற்றொடரைப் பயன்படுத்துவர். இது பெருந் தவறு. ஏனெனில், "சார்பு" என்றாலே ஒரு x-க்கு ஒரே ஒரு y என்பதுதானே? ஆதலின், "சார்பு" என்றால் "ஒரு மதிப்புடைத் தொடர்பு"—என்பதுதானே சரி? அப்படியிருக்க, "ஒரு மதிப் புடைச் சார்பு", "பல மதிப்புடைச் சார்பு" என்பவையெல்லாம் தற்காலத்திய கணித இலக்கணத்திற்குப் புறம்பானவை—ஒவ் வாதன.

2. அநேக மாணவ, மாணவியர்க்கு $f(x)$-க்கும், f-க்கும் உள்ள வேறுபாடே தெரிவதில்லை. $f(x)$-ஐயே 'சார்பு' (function) என்கிறார் கள். சார்பு என்பது தொடர்பு. அதாவது f என்பது சார்பு. $f(x)$ என்பது சார்பலன் அல்லது x-ன் சார்பு. இப்போது, D என்ற மெய்யெண்கள் கணத்தின் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும் "வர்க்கம் கண்டுபிடித்தலை"ச் Squaring) செய்கிறோம் என்று வைத்துக் கொள்ளுங்கள். இந்தச் செய்கை, அதாவது "வர்க்கம் கண்டுபிடித்தல்" என்ற தொடர்பைத்தான் "சார்பு" என்கிறோம். இந்த உதாரணத்தில், $f(2)=4$. ஏனெனில், $2 \in D$, $2^2=4$. 2-ன் சார்பலன் என்ன? 4.

$f(2)$ என்பதை, நியாயமாக, 2-ன் சார்பலன் என்றுதான் சொல்லவேண்டும்.

குறிப்புகள்

1. நேர் முழுவெண்மாறி (positive integral variable) n-ஐ தொடர்பிக்கும் சார்பைத்தான் ஒழுங்கு வரிசை என்று அத்தியாயம் மூன்றில் பார்த்தோம்.

n என்பது முழு எண்ணானால், $f(n)$ ஆனது ஒழுங்கு வரிசையின் n-வது உறுப்பு என்றும் $f(n)$ஐ a_n என்று எழுதினால் $\{a_n\}$ என்பது ஒழுங்கு வரிசை என்ற வழக்கம் வந்துவிட்டது என்றும் பார்த்தோம்.

2. $y=f(x)$ என்பதில் x-க்குச் "சாராமாறி" (independent variable) என்றும், y-க்கு "சார்புடைமாறி" (dependent) என்றும் பெயர்.

5·3. சார்புகளின் வகுப்பாக்கம் (Classification of Functions)

1. பல்லுறுப்பு அல்லது விகிதமுறு முழுவெண்சார்பு (Polynomial or Rational Integral Function) : $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்பவை மாறிலிகள் அல்லது விகிதமுறு எண்கள் என்றும், n என்பது நேர் முழு எண் என்றும் கொண்டால் $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots\ +a_nx^n$ என்ற அமைப்புடை சார்புக்குப் பல்லுறுப்புச் சார்பு என்று பெயர். $a_n \neq 0$ என்றால் $f(x)$-ன் அடுக்கு, n ஆகும்.

2. விகிதமுறு சார்பு (Rational Function): $f(x)$-ம் $g(x)$-ம் இரு பல்லுறுப்புக்கள் என்றும், $g(x)\neq 0$ என்றும் கொண்டால், $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ என்ற அமைப்புடை சார்பு F-க்கு விகிதமுறு சார்பு என்று பெயர்.

உதாரணமாக, $F(x)=\dfrac{a_0+a_1x+\ \ldots\ +a_nx^n}{b_0+b_1x+\ \ldots\ +b_nx^n}$

3. இயற்கணிதச் சார்பு (Algebraic Function): $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... என்பவை x-ல் பல்லுறுப்புகளானால், $p_0(x)\,y^n+p_1(x)y^{n-1}+\ \ldots\ +p_{n-1}(x)y+p_n(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டை உறுதிப் படுத்தும் $y=f(x)$ என்றவாறு உள்ள சார்பையே இயற்கணிதச் சார்பு என்கிறோம்.

விகிதமுறு சார்பும் இயற்கணிதச் சார்பு வகையைச் சேர்ந்தது என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

4. கடந்த சார்பு (Transcendental Function): இயற்கணித சார்பற்ற மற்ற சார்புகள் கடந்த சார்புகள் எனப்படுவன. உதாரணமாக, கோணவிகிதச் சார்புகள் (Trigonometric functions) அடுக்குக்குறி (exponential), மடக்கை (logarithmic), நீள்வளைய (elliptic), பெஸ்ஸல் (Bessel's) லெஜண்டர் (Legendre's) சார்புகள் யாவும் கடந்த சார்புகளே. மேலும் கணித இயல்பியலில் (mathematical physics) கடந்த சார்புகள் பல மிகுந்துள்ளன.

5·4. சில வரை இலக்கணங்கள்

வரை இலக்கணம் I—திறந்த (open), மூடிய (closed), இடைவெளிகள் (intervals)

a, b என்பவை மெய்யெண்கள் என்றும், $a<b$ என்றும் கொள்க. $a \leqq x \leqq b$ என்றவாறு உள்ள எல்லா மெய்யெண்கள் x-ஐ உடைய கணத்தை $[a, b]$ என்று குறியிடுவர். இதற்கு மூடிய இடைவெளி என்று பெயர். (a, b) என்ற திறந்த இடைவெளி $a<x<b$ என்றவாறு உள்ள எல்லா மெய்யெண்கள் x-ஐ உடைய கணமாகும். (a, b), $[a, b]$ என்பனவற்றில் a-ம், b-ம் முனைப் புள்ளிகள் எனப்படுவன.

வரை இலக்கணம் 2—δ-அண்மை (δ-neighbourhood)

$\delta>0$ என்பது மாறிலி எண் என்றால் $|x-x_0|<\delta$-ஐ உறுதிப் படுத்தும் எல்லா x-களின் கணத்தை, புள்ளி x_0-ன் δ-அண்மை (δ-neighbourhood) என்போம். இப்போது இம்மாதிரியான x-ன் அண்மையிலிருந்து x_0-ஐ நீக்கிவிட்டால், எஞ்சியிருக்கும் அண்மையை x_0-ன் ஓட்டை அண்மை அல்லது பொத்தல் அண்மை (punctured neighbourhood) என்று பெயர். இவ்வண்மையில் $0<|x-x_0|<\delta$ என்பதை உறுதிப்படுத்தும் எல்லாப் புள்ளிகள் x-ம் இருக்கின்றன.

(குறிப்பு) —ஒரு சிறு விளக்கம்

$0<|x-x_0|<\delta$ என்பதை ஏற்கனவே ஓரிடத்தில் பார்த்துள்ளோம். அதனை இங்கே நினைவு கூருகிறோம். x_0, δ என்பவை மெய்மாறிலிகள், x என்பது மெய்மாறி.

$|x-x_0|>0$ என்பதால் $x \neq x_0$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் இரண்டு:

(i) $x-x_0>0$ என்க. அப்போது $|x-x_0|=x-x_0$.

$$\therefore |x-x_0|<\delta \rightarrow x-x_0<\delta$$
$$\rightarrow x<x_0+\delta$$

(ii) $x-x_0<0$ என்க. அப்படியானால் $|x-x_0|=x_0-x$

$$\therefore |x-x_0|<\delta \rightarrow x_0-x<\delta$$
$$\rightarrow x_0-\delta<x$$

∴ (i)-யும் (ii)-யும் இணைக்க, நாம் பெறுவது

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

அதாவது, $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ என்ற x_0-ஐ நீக்கிய திறந்த இடைவெளி.

$0<|x-x_0|\leqq\delta$ என்றாலோ, $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, x_0 நீங்கலாக, என்ற மூடிய இடைவெளி.

வரை இலக்கணம் 3

சார்பு f-ன் எண் அரங்கம் D எனில் f ஆனது D-ன் மீது வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது என்று பொருள்.

5·5. சார்புகளுக்குச் சில உதாரணங்கள்

1. $f: (0, 1) \to 1$ அதாவது $f(x)=2,\ 0<x<1$
2. $f(x)=0,\ 0 \leqq x<\frac{1}{2}$

   $=1,\ \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$
3. $f(x)=x,\ 0<x<1$
4. $f(x)=0,\ 0<x<1,\ x$ விகிதமுறு எண்

   $=1,\ 0<x<1,\ x$ விகிதமுறாத எண்
5. $f(x)=|x|,\ \forall x$
6. $f(x)=[x],\ \forall x$

இங்கே $[x]$ என்பது x-ன் மீப்பெரிய முழு எண் பாகத்தைக் குறிக்கிறது. இதனை மீப்பெரிய முழுவெண் சார்பு அல்லது அடைப்புச் சார்பு என்பர்,

7. $f(x)=x \sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad 0<x<1$
8. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

5·6. சார்புகளின் வகைகள் அல்லது இனங்கள் (Kinds or Classes of Functions)

1. நேர் சார்பு (Positive Function) ஒவ்வொரு மெய்மாறி $x\in[a, b]$க்கும் $f(x)\geqq 0$ என்றால் $[a, b]$ல் $f(x)$ ஆனது x-ன் நேர் சார்பு எனப்படும்.

2. குறை சார்பு (Negative Function) : ஒவ்வொரு மெய்மாறி $x\in[a, b]$க்கும் $f(x)\leqq 0$ என்றால் $[a,b]$-ல் $f(x)$-ஐ x-ன் குறைசார்பு என்போம்.

3. ஒற்றைச் சார்பு (Odd Function), இரட்டைச் சார்பு (Even Function) f ஆனது $[a, b]$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டு, $f(-x)=-f(x)\ \forall x\in[a, b]$ என்றால் f-ஐ ஒற்றைச் சார்பு என்போம்.

அப்படியின்றி, $f(-x)=f(x)$ என்றால் f-ஐ இரட்டைச் சார்பு என்போம்.

$\sin(x) = -\sin(-x)$ என்பதால் $\sin x$ என்பது x-ன் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

$\cos x=\cos(-x)$ என்பதால் $\cos x$-ஐ x-ன் இரட்டைச் சார்பு என்போம்.

4 **திரும்புச் சார்பு (Periodic Function)**: f ஆனது $a \leq x \leq b$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டு, எல்லா x-க்கும் $f(x+p)=f(x)$ என்றால் f-ஐக் காலவட்டம் p உடைய "திரும்புச் சார்பு" என்போம். உதாரணமாக, $f(x)=\sin x=\sin(x+2\pi)$ என்பதால் $\sin x$ சார்பின் காலவட்டம் 2π ஆகும்.

5·7. ஒரு சார்பின் வரைபடம் (Graph of a Function)

f-ன் எண் அரங்கத்து உறுப்புக்களை x-அச்சிலும், x-ன் சார்பலனை அதாவது $f(x)$-ஐ y-அச்சிலும் குறித்தால், (x, y) புள்ளிகளின் நியமப்பாதை (locus) தான் f-சார்பின் வரைபடம் ஆகும்.

5·8. வரை இலக்கணம்

சார்பு எல்லை (Limit of a Function) கோஷியின் வரையறை Cauchy's Definition, I என்ற இடைவெளியின் மீது f என்னும் சார்பை வரையறுக்க. x_0 என்பது I-ன் ஒரு முனைப் புள்ளியாகவோ அல்லது I இடைவெளியினுள்ளோ இருக்கட்டும். ஒவ்வொரு $\epsilon>0$-க்கும், ஒரு $\delta(\epsilon)>0$ ஆனது, $x \in I$, $0<|x-x_0|<\delta \rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$ என்றால், x ஆனது x_0-ஐ அணுக, l-ஐ f-ன் எல்லை என்போம். இதனை $\lim_{x \to x_0} f(x)=l$ என்றும் எழுதலாம். ($\delta(\epsilon)$ என்றால், δ ஆனது ϵ-ஐப் பொறுத்தது என்று பொருள். $0<|x-x_0|$ என்பதன் பொருள் $x \neq x_0$ என்பதைக் கவனிக்க). இம்மாதிரி l இல்லையானால், x ஆனது x_0-ஐ அணுக, f-க்கு எல்லை இல்லை என்போம். அதாவது $\lim_{x \to x_0} f(x)$ இல்லை என்போம்.

குறிப்பு

f ஆனது x_0 இடத்து வரையறுக்கப்படவேண்டிய அவசியம் இல்லை. உதாரணமாக, I என்பது திறந்த இடைவெளியென்றும்

x_0 ஆனது ஒரு முனைப் புள்ளியென்றும் கொண்டால், $f(x)$ ஆனது $x=x_0$-க்கு வரையறுக்கப்படவில்லை அதாவது $f(x_0)$ ஆனது வரையறுக்கப்படவில்லை. அப்படியே x_0 இடத்து f ஆனது வரையறுக்கப்பட்டாலும், x_0 இடத்து f-ன் மதிப்பு ஆனது, அதாவது $f(c)$ ஆனது, f-க்கு எல்லை இருக்கிறது அல்லது இல்லை என்பதைப் பொறுத்தோ, அல்லது, f-ன் எல்லை l-ஐப் பொறுத்தோ இல்லை. x-ஐ x_0 இடத்து அணுக வைத்தால், $f(x)$ ஆனது l இடத்து அணுக வைக்கலாம். மிகமிக முக்கியமான சொற்றொடர் — மேற்கண்ட வரை இலக்கணத்தில் — என்னவென்றால், "ஒவ்வொரு $\epsilon>0$-க்கும்" என்பதாம்.

5·9. சார்பு எல்லைக்கு உதாரணங்கள்

(1) f என்ற சார்பின் வரையறை அரங்கம் $[1, 2]$ என்றும், இவ்விடைவெளியின் ஒவ்வொரு x-க்கும் $f(x)=3$ என்றும் கொண்டால் $\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=3$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

$[1,2]$-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும் $f(x)=3$ என்பதால், $|f(x)-3| =0<\epsilon>0$. $\delta=1$ என்றால், $0<|x-\frac{3}{2}|<\delta$.

$$\therefore\ x\in[1, 2],\ 0<|x-\tfrac{3}{2}|<\delta,\ \epsilon>0\to |f(x)-3|<\epsilon.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=3.$$

(2) f-ன் வரையறை அரங்கம் $(0, 1)$ என்க; அதாவது $0<x<1$ என்க. $\forall x\in 0<x<1$, $f(x)=2$ என்க. $\lim_{x\to 0} f(x)=?$

$\epsilon>0$, $\delta=1$ என்க. $\therefore 0<|x-0|<\delta$. ஆனால் $|f(x)-2|=0<\epsilon$, $\forall x\in(0, 1)$.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=2$. f ஆனது $x=0$ இடத்து வரையறுக்கப் படவில்லை என்பதைக் கவனிக்க.

(3) f-ன் வரையறை அரங்கம் $[0, 1]$ என்றும், திறந்த இடைவெளி $(0, 1)$-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும், $f(x)=3$ என்றும், $x=0$ என்ற இடத்து $f(x)=4$ என்றும், $x=1$ என்ற இடத்து $f(x)=e$ என்றும் கொண்டால் $\lim_{x\to 0} f(x)=3$.

அதாவது,

$$f(x) = 3, \quad 0<x<1$$
$$= 4, \quad x=0$$
$$= e, \quad x=1$$

என்றால் $\lim_{x\to 0} f(x)=3$. எப்படி?

யாதாமொரு $\epsilon>0$-க்கு $\delta=1$ என்றால், $0<|x-0|<\delta=1$
$\to |f(x)-3|<\epsilon$

ஏனெனில்

எல்லைக்கான வரை இலக்கணத்தில் (5·8-ஐ நோக்குக!) $x=x_0$-ஐத் தவிர்க்க வேண்டும் என்றோம். ஆகையால் இங்கேயும் $x=0$ ஐத் தவிர்க்க! அப்படியானால் $x=0$ என்ற இடத்து $f(x)=4$ என்பதைப் பற்றி நமக்குக் கவலை கிடையாது.

(4) $f(x)=4x \quad [0, 4]$

$\lim_{x\to 3} 4x=12$ என நிறுவுக.

$f(x)=4x$ என்க.

$\epsilon>0$ என்றால், $0<|x-3|<\delta(\epsilon)\to |4x-12|<\epsilon$ என்றவாறு ஒரு δ-ஐக் காணலாம்.

$$|4x-12|<\epsilon\to 4|x-3|<\varepsilon$$
$$\to |x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$$

(5) f-ன் வரையறை அரங்கம் $(0,1)$ என்றும், $f(x)=x, \forall x\in (0, 1)$ என்றும் கொள்க. ஒவ்வொரு $a\in[0, 1]$க்கும் $\lim_{x\to a} f(x)=a$ எனக் காண்பிக்கலாம். எப்படியெனில்,

$\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$ என்க.

$x\in(0, 1)\to 0<|x-a|<\delta=0<|f(x)-a|<\delta \because f(x)=x$
$\to |f(x)-a|<\varepsilon \quad \because \delta=\varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = a$$

(6) f-ன் வரையறை அரங்கம் (0, 1) என்றும், $f(x) = \frac{1}{x}$

$\forall x \in (0,1)$

என்றும் கொள்க. $\lim_{x \to 0} f(x)$ இல்லையென நிறுவலாம்.

l என்பது ஒரு மெய்யெண் என்க.

$\varepsilon = 1$ என்றும், $\delta > 0$ என்றும் கொள்க.

$N_1 > |l| + 1$ என்றவாறும், $N_2 > \frac{1}{\delta}$ என்றவாறும் முழுவெண்கள் N_1, N_2 இருக்கின்றன.

$N = \max\{N_1, N_2, 2\}$ என்றால், $\frac{1}{N}$ என்ற எண் (0, 1)-ல் இருக்கிறது.

$$\therefore \quad 0 < \left| \frac{1}{N} - 0 \right| > \delta$$

$\left| f\left(\frac{1}{N}\right) - l \right| = |N - l|$ ஏனெனில் $f(x) = \frac{1}{x}$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\geq |N| - |l| = N - |l|$$
$$\geq |l| + 1 - |l| = 1 = \varepsilon$$

இது எல்லைக்கான வரை இலக்கணத்துக்குப் புறம்பானது. ஏனெனில் $| f(\ ) - (\ ) |$ என்பது ϵ-ஐ விடச் சிறியதாக இருக்க வேண்டுமேயன்றி, பெரியதாய் இருக்கக்கூடாது. $\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ இல்லை.

(7) f-ன் வரையறை அரங்கம் $(-1, 1)$ என்க.

$$f(x) = -1, \quad -1 < x < 0$$
$$= 0, \quad x = 0$$
$$= 1, \quad 0 < x < 1$$

என்றால் $\lim_{x \to 0} f(x)$ இல்லை என நிறுவலாம்.

அதாவது, ஒவ்வொரு மெய்யெண் l-க்கும் ஒவ்வொரு $e>0$ ஆனது, ஒவ்வொரு $\delta > 0$-க்கும் ஒரு $x\in(-1, 1)$ ஆனது $0< | x-0 | <\delta$ என்றும் $| f(x)-l | \geqq \varepsilon$ என்றவாறுமாக இருந்தால், $\lim_{x\to 0} f(x)$ இல்லை.

மூன்று செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் : $l\geqq 1$, அல்லது, $l<1$

$l\geqq 1$ என்க. $\epsilon=2$, $\delta>0$ என்க.

அப்படியானல் ஒரு $x_0<0$ என்ற ஒரு எண் $x_0\in (-1, 1)$, $0< | x_0-0 | <\delta$ என்றவாறு இருக்கிறது.

எனினும், $| f(x_0)-l | = | -1-l | \geqq 2=\epsilon$. இது எல்லையின் வரை இலக்கணத்துக்குப் புறம்பானது.

$l<1$ என்றால், $\epsilon= | 1-l |$ என்க. $\delta>0$ என்க.

அப்படியானல் $x_1>0$ என்ற ஒரு எண் $x_1\in (-1, 1)$, $0< | x_1-0 | <\delta$ என்றவாறு இருக்கிறது.

$\therefore\ | f(x_1)-l | = | 1-l | =\varepsilon$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ இல்லை.

5·10. தேற்றம் 1

f என்னும் சார்பின் வரையறை அரங்கம் I என்ற இடைவெளி என்றும், c என்பது I-ன் முனைப் புள்ளி அல்லது Iயினுள் யாதானும் ஒரு புள்ளி என்றும் கொள்க். l என்பது ஒரு மெய் யெண் என்க. $a_n\in I$ என்றும், $a_n\neq c$ என்றும் கொள்க. அப்படியானல், $\lim_{n\to\infty} f(x)=l$ என்பதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை யாவது, c-க்கு ஒருங்கும் ஒவ்வொரு ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$ -க்கும் $\{f(a_n)\}$ ஆனது l-க்கு ஒருங்குகிறது.

நிறுவல்

வேண்டிய நிபந்தனை :

$\lim_{x\to c} f(x)=l$ என்க.

ஒவ்வோரு n-க்கும், $a_n \in I$, $a_n \neq c$, $\lim_{n \to \infty} \{a_n\} = c$ என்றவாறு $\{a_n\}$ என்ற ஒழுங்கு வரிசை ஒன்றைக் கருதுக.

$\epsilon > 0$ என்க.

$x \in I$, $0 \mid x-c \mid < \delta \to \mid f(x)-l \mid < \varepsilon$ என்றவாறு ஒரு $\delta > 0$ இருக்கிறது.

$\lim_{n \to \infty} a_n = c$ என்பதால், $n \geq N \to \mid a_n - c \mid < \delta$ என்றவாறு ஒரு N இருக்கிறது.

$a_n \neq c \to 0 < \mid a_n - c \mid < \delta$

$\therefore \mid f(a_n) - l \mid < \epsilon$.

அதாவது $\lim_{n \to \infty} \{f(a_n)\} = l$.

போதிய நிபந்தனை

ஒவ்வொரு n-க்கும், $a_n \in I$, $a_n \neq c$, $\lim_{n \to \infty} \{a_n\} = c$ என்றவாறு ஒவ்வொரு ஒழுங்கு வரிசை $\{a_n\}$ -க்கும் $\lim_{n \to \infty} \{f(a_n)\} = l$ என்பது உண்மையானால், $\lim_{x \to c} f(x) = l$ என்று நிறுவ வேண்டும்.

$\lim_{x \to c} f(x) \neq l$ என்றால், ஒவ்வொரு n-க்கும், $a_n \in I$, $a_n \neq c$, $\lim_{n \to \infty} a_n = c$, $\lim_{n \to \infty} \{f(a_n)\} \neq l$ என்றவாறு $\{a_n\}$ என்றொரு ஒழுங்கு வரிசை இருக்கிறது எனக் காண்பித்தால் போதும்.

$\lim_{x \to c} f(x) \neq l$ என்றால், ஒவ்வொரு $\delta > 0$-க்கு ஒரு புள்ளி $x \in I$ ஆனது $0 < \mid x-c \mid < \delta$, $\mid f(x) - l \mid \geq \varepsilon$ என்றவாறு ஒரு $\epsilon > 0$ இருக்கிறது.

$\{x_n\}$ என்னும் ஒழுங்கு வரிசையைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்க :

n ஒரு நேர் முழு எண்ணானால் $\delta = \frac{1}{n}$ -க்கு, $0 < \mid x_n - c \mid < \frac{1}{n}$ $\mid f(x_n) - l \mid \geq \varepsilon$ என்றவாறு x_n என்று ஏதோ ஒரு புள்ளி I-ல்

இருக்கட்டும் $\therefore$ ஒவ்வொரு n-க்கும், $x_n \in I$, $x_n \neq c$, $\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = c$. எனினும், ஒவ்வொரு n-க்கும் $|f(x_n) - l| \geq \epsilon$ என்பதால்

$$\lim_{n \to \infty} \{f(x_n)\} \neq l.$$

தேற்றம் 2

கோஷியின் எல்லை இருப்பதற்கான "வேண்டிய போதிய நிபந்தனை (Cauchy's necessary and sufficient condition for the existence of limit):

x ஆனது a-ஐ அணுக, $f(x)$ ஆனது ஒரு முடிவுள்ள எல்லை l-ஐ அணுகுவதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனையாவது, ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கு ஒத்த ஒரு எண் $\delta(\epsilon) > 0$ ஆனது, x_1, x_2 என்ற யாதாமிரு x-களுக்கு,

$$0 < |x_1 - a| \leqq \delta, \quad 0 < |x_2 - a| \leqq \delta \rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

என்றவாறு இருக்கவேண்டும்.

நிறுவல்

பாகம் 1—நிபந்தனை வேண்டியது:

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ என்க.

$\therefore \frac{\epsilon}{2} > 0$க்கு ஒத்த ஒரு $\delta(\epsilon) > 0$ ஆனது, $0 < |x - a| < \delta$க்கு

$|l - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ என்றவாறு இருக்கிறது.

இச்சமனின்மை, $0 < |x - a|\, \delta$ என்ற இடைவெளியின் ஒவ்வொரு x-க்கும் உண்மை.

இச்சமனின்மையை உறுதிப்படுத்தும் x-ன் யாதாமிரு மதிப்புகள் x_1, x_2 என்க.

$$\therefore \quad 0 < |x_1 - a| < \delta \rightarrow |l - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x_2 - a| < \delta \rightarrow |l - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

இப்போது,

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |(f(x_2) - l) + (l - f(x_1)| \\ &\leqq |f(x_2) - l| + |l - f(x_1)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

பாகம் 2—போதியது.

நேர் எண்களின் ஒரு ஒழுங்கு வரிசை $\{\epsilon_n\}$-ஐ,

$\epsilon_{n+1} < \epsilon_n$ $(n=1,2,\ldots)$, என்றவாறும்,

$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ என்றவாறும் அமைக்க.

(1) $0<|x_1-a|\leqq\delta_n,\ 0<|x_2-a|\leqq\delta_n,\ (n=1,2,\ldots)$
$\to |f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon_n$ என்றவாறு $\{\delta_n\}$ என்ற ஒழுங்கு வரிசையைக் கருதுக.

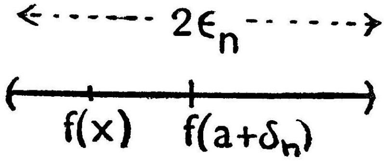
$\epsilon_{n+1}<\epsilon_n \to \delta_{n+1}<\delta_n$

சமனின்மை (1)-ல், $x_1=a+\delta_n,\ x_2=x$ என்று பிரதியிடுக.

$\therefore\ 0<|x-a|\leqq\delta_n \to |f(x)-f(a+\delta_n)|<\epsilon_n$

அதாவது,

(2) $f(a+\delta_n)-\epsilon_n<f(x)<f(a+\delta_n)+\epsilon_n$



படம் 40

$\therefore$ $2\epsilon_n$ நீளமுடைய, $f(a+\delta_n)$-ஐ மையமாகவுடைய இடைவெளியில் (இதனை I_n என்க) $f(x)$ இருக்கிறது.

இதுபோல், $0<|x-a|\leqq\delta_{n+1}$ என்றால்,

(3) $f(a+\delta_{n+1})-\epsilon_{n+1}<f(x)<f(a+\delta_{n+1})=\epsilon_{n+1}$,

$\delta_{n+1}<\delta_n\to 0<|x-a|\leqq\delta_{n+1}\subset 0<|x-a|\leqq\delta_n$

$\therefore$ $f(a+\delta_{n+1})$-ஐ மையமாகவுடைய, $2\epsilon_{n+1}$ நீளமுடைய இடைவெளி I_{n+1}-ல் $f(x)$ இருக்கிறது.

$\therefore\ I_{n+1}\subset I_n$

$\therefore\ I_n\equiv[f(a+\delta_n)-\epsilon_n,\ f(a+\delta_n)+\epsilon_n]\ n=1,2,\ldots$

$I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots$ என்ற இடைவெளிக் கூடு கிடைக்கிறது.

கூடவும், $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ என்றழைத்தால்,

$$\lim_{n \to \infty} (\beta_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} 2\varepsilon_n = 0$$

$\therefore$ இடைவெளிக்கூடு தேற்றத்தின்படி, $\lim_{n \leftarrow \infty} \alpha_n = l = \lim_{n \to \infty} \beta_n$ என்றவாறு ஓரே ஒரு புள்ளி l ஆனது ஒவ்வொரு இடைவெளிக்கும் பொதுவாக இருக்கிறது.

இப்போது $\lim_{x \to a} f(x) = l$ என்று காண்பிக்க வேண்டும்.

$0 < |x - a| \leqq \delta_n$ என்றால்,

$\alpha_n < f(x) < \beta_n$ என நிறுவினோம்.

ஆனால் $\alpha_n \leqq l \leqq \beta_n$

$\epsilon > 0$ என்றால் $\epsilon_n < \frac{\epsilon}{2}$ என்று ϵ_n-ஐ எடுத்துக்கொள்.

$\therefore$ $0 < | x - a\delta | \leqq_n$ என்றால்

$| l - f(x) | < \beta_n - \alpha_n < 2\epsilon_n < \varepsilon$

$\therefore$ $\lim_{x \to a} f(x) = l.$

5·11. சார்புகளின் தொகை, வேறுபாடு, பெருக்கம், ஈவு வரை இலக்கணங்கள்:

பொதுவான வரையறை அரங்கம் D-ன் மீது வரையறுக்கப் பட்ட சார்புகள் f, g என்க. இச்சார்புகளின் தொகையானது $f+g$ என்ற குறியுடைய சார்பு என்றால், இச்சார்பின் வரையறை அரங்கம் D என்றும், D-ன் ஒவ்வொரு x இடத்து, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ என்றுமாகும்.

வேறுபாடு $f - g$ என்பது சார்பு என்றால், இதன் வரையறை அரங்கமும் D-தான், அத்துடன்கூட D-ன் ஒவ்வொரு x இடத்து, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. பெருக்கம் fg ஆனதும் சார்பு என்றால், இதன் வரையறை அரங்கமும் D, கூட, D-ன் ஒவ்வொரு x இடத்து, $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$.

D-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும், $g(x)\neq 0$ என்றால் ஈவு $\frac{f}{g}$ என்பது சார்பு என்றால், இதன் வரையறை அரங்கம் D, D-ன் ஒவ்வொரு x இடத்து $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. k என்பது ஒரு மெய்யெண்ணானால், f என்பது D-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட சார்பானால், kf என்பது D-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு என்றும், D-ன் ஒவ்வொரு x இடத்தும் $(kf)(x)=k(f(x))$ என்றும் கொள்க.

தேற்றம்

இடைவெளி I-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகள் f, g என்க.

c என்பது I-ன் ஒரு முனைப் புள்ளியாகவோ, I-ன் உள் ஒரு புள்ளியாகவோ இருக்கட்டும். k என்பது ஒரு மெய்யெண் என்க.

$\lim_{x\to c} f(x)=A$, $\lim_{x\to c} g(x)=B$ என்க. அப்படியானால்,

(1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x)=A+B$

(2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x)=A-B$

(3) $\lim_{x\to c} (fg)(x)=AB$

(4) I-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும், $g(x)\neq 0$, $B\neq 0\to \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{A}{B}$

(5) $\lim_{x\to c} kf(x)=kA.$

நிறுவல்

(1) $\lim_{x\to c} f(x)=A$

$$\therefore\ 0<|x-c|<\delta_1\to |f(x)-A|<\frac{e}{2} \qquad \ldots\ldots (i)$$

$\lim_{x\to c} g(x)=B$

$\therefore\ 0 < |x-c| < \delta_2 \rightarrow |g(x)-B| < \frac{\epsilon}{2} \ldots\ldots$ (ii)

$0 > \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ என்றால்,

(i)-ம் (ii)-ம், $0 < |x-c| < \delta$-க்கு உண்மை.

$\therefore\ 0 < |x-c| < \delta$ என்றால்

$$|\{f(x)+g(x)\}-(A+B)| = |\{f(x)-A\}+\{g(x)-B\}|$$
$$\leqq |\{f(x)-A| + |g(x)-B|$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$$\therefore \lim_{x\rightarrow c} \{f(x)+g(x)\} = A+B.$$

(2) முன்போல்,

$$0 < |x-c| < \delta_1 \rightarrow |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x-c| < \delta_2 \rightarrow |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ என்றால்

$0 < |x-c- < \delta$-க்கு,

$$|\{f(x)-g(x)\}-(A-B)| = |\{f(x)-A\}-\{g(x)-B\}|$$
$$\leqq |f(x)-A| + |g(x)-B|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{x\rightarrow c} \{f(x)-g(x)\} = A-B.$$

(3) $\lim_{x\rightarrow c} \varphi(x) = 0$, $\lim_{I\rightarrow c} \psi(x) = 0$ என்க.

$\lim_{x\rightarrow c} f(x) = A$, $\lim_{x\rightarrow c} g(x) = B$ என்பதால்,

$f(x) = A + \varphi(x)$ என்றும், $g(x) = B + \psi(x)$ என்றும் எழுதலாம்.

$$f(x)\, g(x) = \{A+\varphi(x)\}\{B+\psi(x)\}$$
$$= AB + A\psi(x) + B\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)$$

$$\lim_{x\to c} f(x)\, g(x) = AB + A.(0) + B.(0) + \lim_{x\to c} \varphi(x)\, \psi(x)$$

$$= AB + \lim_{x\to c} \varphi(x)\, \psi(x)$$

இப்போது, $\lim_{x\to c} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x\to c} \psi(x) = 0$ என்பதால்,

$0 < |x-c| < \delta_1 \rightarrow |\varphi(x)| < \sqrt{\varepsilon}$

$0 < |x-c| < \delta_2 \rightarrow |\psi(x)| < \sqrt{\varepsilon}$

என்றவாறு δ_1, δ_2 இருக்கின்றன.

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ என்றால்,

$$0 < |x-c| < \delta \rightarrow |\varphi(x)\, \psi(x)| = |\varphi(x)|\, |\psi(x)|$$

$$< \sqrt{\epsilon}\sqrt{\epsilon} = \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{x\to c} \varphi(x)\, \psi(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to c} f(x)\, g(x) = AB.$$

(4) $\lim_{x\to c} f(x) = A$, $\lim_{x\to c} g(x) = B \neq 0$ என்று தரப்பட்டுள்ளது.

$h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ என்க.

$$\therefore h(x)\, g(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to c} h(x) \lim_{x\to c} g(x) = 1$$

(அ-து) $B \lim_{x\to c} h(x) = 1$

(அ-து) $\lim_{x\to c} h(x) = \dfrac{1}{B}$

(அ-து) $\lim_{x\to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$

$$\therefore \lim_{x\to c} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)}$$

$$= A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

(5) இஃது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டது.

(குறிப்பு: (3)-ஐப் பயன் படுத்துக.)

5·12. வரை இலக்கணம் 1

G என்பது நம் விருப்பத்திற்கிணங்கிய மிகமிகப் பெரிய எண் என்க.

$0 < |x-c| < \delta \rightarrow f(x) > G$ என்றவாறு δ என்ற எண் இருந்தால்,

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ என்றும்,

$0 < |x-c| < \delta_1 \rightarrow f(x) < -G$ என்றவாறு δ_1 என்ற எண் இருந்தால் $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ என்றும் எழுதுகிறோம்.

வரை இலக்கணம் 2

$\epsilon > 0$ என்பது தரப்பட்டுள்ள சிறிய நேர் எண் என்க.

$x > G \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ என்றவாறு நம் விருப்பத்துக்குரிய பெரிய எண் G இருந்தால் $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ என்றும்,

$x < -G \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$ என்றால்

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ என்றும் எழுதுவது வழக்கம்.

5·13. ஒரு பக்க எல்லைகள் (One-sided Limits)

வரை இலக்கணம் 1 – இடக்கை எல்லை (Left hand limit) $\epsilon > 0$ என்பது நம் விருப்பத்திற்கிணங்கிய மிகச் சிறிய எண் என்க. $c - \delta < x < c \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$ என்றால் A என்பது $f(x)$-ன் இடக்கை எல்லை (Left hand limit) என்போம்.

விளக்கம்

c-யினும் சிறிய மதிப்புகள் வழி x ஆனது c-ஐ அணுக, $f(x)$ ஆனது A-ஐ அணுகுகிறது. அதாவது x ஆனது c-ஐ இடது புறத்திலிருந்து அணுக, $f(x)$ ஆனது A-ஐ நெருங்குகிறது. இதனை

$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = A$ என்றோ,

$\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=A$ என்றோ,

$f(c-0)=A$ என்றோ $f(c^-)$ என்றோ எழுதுவது வழக்கம்.

வரை இலக்கணம் 2—வலப்பக்க எல்லை (Right hand limit):

$\epsilon>0$ என்ற சிறிய எண்ணுக்கு ஒத்த ஒரு δ ஆனது $c<x<c+\delta\rightarrow |f(x)-B|<\epsilon$ என்றவாறு இருந்தால், x ஆனது c-ஐ அணுக $f(x)$-க்கு B ஆனது வலப்பக்க எல்லை என்போம்.

இதனை $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)B$ என்றோ, $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=B$-யாகவோ, $f(c+0)=B$ என்றோ $f(c^+)$ என்றோ எழுதுவது வழக்கம்.

விளக்கம்

c-யினும் பெரிய மதிப்புக்கள் வழி x ஆனது c-ஐ அணுக, $f(x)$ ஆனது B-ஐ நெருங்குகிறது. அதாவது, x ஆனது c-ஐ வலப்பக்கமாக அணுகினால், $f(x)$ ஆனது B-ஐ அணுகுகிறது.

குறிப்பு

$f(x)\ \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+}$ என்றால் $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ இருக்கிறது.

அதாவது $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ என்றால் $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ இல்லை என்று பொருள்.

$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ அல்லது $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ இவற்றில் ஒன்றேனும் அல்லது இரண்டுமே இல்லையானால், $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ இல்லை.

விளக்க உதாரணங்கள்

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ என்றால் $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ என்ன?

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ என்ன என்பதைக் காண்போம்.

2-க்கு அண்மையில், 2-ஐவிடச் சிறிய நேர் எண்கள் வழி x ஆனது 2-ஐ அணுக, $f(x)$-ன் என்ன மதிப்புகள் என்பதைக் காண்போம்.

$x=1\cdot9$ என்றால், $f(x)=\dfrac{(1\cdot9)^2-4}{1\cdot9-2}=\dfrac{3\cdot61-4}{-\cdot1}=\dfrac{-\cdot39}{-\cdot1}=\dfrac{\cdot39}{\cdot1}=3\cdot9$

இதுபோல்,

$x=1{\cdot}99,\quad 1{\cdot}999,\quad 1{\cdot}99999999,\quad 1{\cdot}999999999999\ \ldots$ க்கு

$f(x)=3{\cdot}99,\quad 3{\cdot}999,\quad 3{\cdot}99999999,\quad 3.999999999999\ \ldots$

$\therefore$ $f(x)$ ஆனது 4-ஐ நெருங்குகிறது.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4.$$

இப்போது 2-க்கு அண்மையில், 2-ஐ விடப் பெரிய நேர் எண்கள் வழி x ஆனது 2-ஐ அணுக, $f(x)$-ன் மதிப்புகளின் நடத்தையை ஆய்வோம்.

$x=2{\cdot}01,\quad 2{\cdot}001,\quad 2{\cdot}00001,\quad 2{\cdot}00000000001,\ \ldots$ க்கு

$f(x)=4{\cdot}01,\quad 4.001,\quad 4{\cdot}00001,\quad 4{\cdot}00000000001,\ \ldots$

$\therefore$ $f(x)$ ஆனது 4-ஐ நெருங்குகிறது.

$$\therefore \lim_{x\to 2^+} f(x)=4.$$

இப்போது, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=4$

$$\therefore \lim_{x\to 2}=4.$$

(2) $f(x)=x,\quad x>0$

$\quad\quad=0,\quad x=0$

$\quad\quad=-x,\quad x<0$

என்று வரையறுக்கப்பட்டால், $\lim_{x\to 0} f(x)$-ஐக் காண்க.

விடை

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$$\because \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0,\ \therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

எல்லைக்கான வரை இலக்கணப்படி, $x=0$ இடத்து, $f(x)$-ன் மதிப்பைப் பற்றிக் கவலை இல்லை.

(3) $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ இல்லை என நிறுவுக. (f-ன் வரையறை அரங்கம் (0,1) என்க.)

5·10 தேற்றம் 1-ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

தேற்றத்தின்படி, $\lim_{x\to 0} f(x) = l \longleftrightarrow a_n \neq 0,$

0-க்கு ஒருங்கும் ஒவ்வொரு $\{a_n\}$-க்கும், $\{f(a_n)\}\to l.$

இப்போது 0-க்கு ஒருங்கும் இரு ஒழுங்கு வரிசைகள் $\{a_n\}$, $\{b_n\}$-ஐ எடுத்துக் கொண்டு $\lim_{n\to\infty}\{f(a_n)\} \neq \lim_{n\to\infty}\{f(b_n)\}$ என்று காண்பித்தோமானுல் போதும்.

$$0 < \frac{1}{n\pi} < 1$$

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n\pi}\right\} \to 0. \quad f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin\frac{1}{\left(\frac{1}{n\pi}\right)} = \sin n\pi = 0,$$

$\forall n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\therefore \left\{f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right\} = \{\sin n\pi\} \to 0.$$

இப்போது $0 < \frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\pi < 1.$

$\left\{\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\} \to 0$ என்பது தெளிவு.

$$f\left\{\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\} = \sin\left(2\pi+\frac{1}{2}\right)\pi = \sin(2n\pi+\tfrac{1}{2}\pi) = \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1$$

$$\left\{f\left\{\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}\right\} = \{1\} \to 1.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right\} \neq \lim_{n\to\infty}\left\{f\left\{\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}\right\}$$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ இல்லை.

மற்றொரு நிறுவல் (கோஷியின் வேண்டிய போதிய நிபந்தனை)

$0<|x|\leqq\delta$ என்ற இடைவெளியில் x_1, x_2 என்ற யாதானும் இரு புள்ளிகளுக்கு $|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon$ என்றவாறு $\epsilon>0$-க்கு ஒத்த ஒரு எண் $\delta>0$ இருந்தால்தான் $\lim_{x\to 0} f(x)$ இருக்க முடியும், என்பதுதானே கோஷியின் வேண்டிய போதிய நிபந்தனை?

போதிய அளவு பெரிய n-க்கு $x_1=\frac{1}{2n\pi}$, $x_2=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்க. n-ஐப் போதிய அளவு பெரியதாக எடுத்துக்கொண்டால், எந்த $\epsilon>0$-க்கும் $0<|x|\leqq\delta$ என்றவாறு நிலையான எண் δ-ஐக் காணலாம் என்றால் x_1, x_2-ஐ இவ் விடைவெளிக்குள்ளே எப்போதும் இருக்கின்றன. இப்புள்ளிகள் (0, 1)-ல் உள்ளன.

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_n)| &= |\sin(4n+1)\tfrac{1}{2}\pi-\sin 2n\pi|\\ &=|\sin(2n\pi+\tfrac{1}{2}\pi)-\sin 2n\pi|\\ &=|\sin\tfrac{1}{2}\pi-\sin 2n\pi|\\ &=|1-0|=1\end{aligned}$$

ϵ-ஐ 1-ஐ விடச் சிறியதாக எடுத்துக்கொண்டால்

$|f(x_2)-f(x_1)|>\epsilon$ என்றாகிறது.

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ இல்லை.

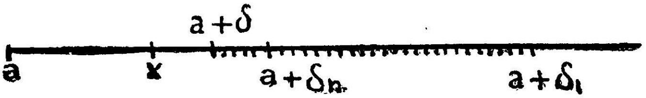
5·14. எல்லைகளைக் காண சுலப வழி (5·10 தேற்றத்தின் வேறு தேற்றம்)

வலக்கை எல்லை : இதன் தத்துவத்தை 5·10 தேற்றத்தில் கண்டோம். இத்தேற்றத்தின் தோற்றத்தை மாற்றி அமைத்தால் நமக்கு ஒரு வழி பிறக்கின்றது.

$\lim_{x\to a^+} f(x)$-ஐக் காணும் விதமென்ன? $f(x)$-ன் வரையறை அரங்கம் (α, β) என்றும், $a\in(\alpha, \beta)$ என்றும் கொள்க.

$a<x<a+\delta$ என்ற x-ன் அண்மையை எடுத்துக்கொள்க.

$\{\delta_n\}\to 0$ என்றவாறு δ-ன் மதிப்புகள் $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ என்க. இப்போது $\{\delta_n\}$-க்கு ஒத்த $\{f(a+\delta_n)\}$-ஐக் கிடைக்கப் பெற்றோம். $\lim\limits_{n\to\infty} \{f(a+\delta_n)\}\to l$ என்றால், l-ஐ $f(x)$-ன், $x=a$-க்கு ஒத்த, வலப் பக்க எல்லை என்போம். இதையே $f(a+0)$ என்றும் குறிப்பர்.



படம் 41

$$f(a+0)=\lim_{\delta_n\to 0} \{f(a+\delta_n)\}$$

அதாவது $f(a+0)= \lim\limits_{\delta\to 0} f(a+\delta)=l, \quad \delta>0.$

இடக்கை எல்லை: இப்போது, a-ன் இடக்கை அண்மை $a-\delta<x<a$ என்றால், முன்போல், $f(x)$-ன் இடக்கை எல்லையை,

$f(a-0) = \lim\limits_{\delta\to 0} f(a-\delta)= l', \; \delta>0$ என்றெழுதலாம்.

இப்போது, $f(a+0)=f(a-0)$ என்றால், $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ இருக்கிறது என்று பொருள்.

கவனிக்க: (1) $f(a\pm\delta)$ என்றால் "$f(x)$ல் x-க்குப்பதில் $a\pm\delta$-ஐப் பிரதியிடுக" எனப்பொருள். $f(a\pm 0)$ என்றால் வலக்கை அல்லது இடக்கை எல்லை எனப்பொருள்.

(2) சில கணக்குகளில் $\lim\limits_{\delta\to 0} f(a+\delta)$ ஆனது ஒரே ஒரு எல்லையைக் கொடுக்காமல் இருக்கலாம். அதாவது $\{f(a+\delta_n)\}$ ஆனது முடிவுள்ளதாகவோ, முடிவற்றதாகவோ அலையலாம். அப்படிப்பட்ட எல்லைகளில் மீப்பெரியதை வலக்கை மேல் எல்லை (Right hand upper limit) என்றும், மீச்சிறியதை வலக்கைக் கீழ் எல்லை (Right hand lower limit) என்றும் சொல்லுவர். இவற்றை முறையே $\overline{f(a+0)}, \underline{f(a+0)}$ என்றும் குறியிடுவர்.

இப்படியே, இடக்கை மேல் எல்லை $\overline{f(a-0)}$ இடக்கைக் கீழ் எல்லை $\underline{f(a-0)}$ ஆகியவற்றை வரையறுக்கலாம்.

$x=0$ இடத்து, மேற்கண்ட எல்லைகளை $\overline{f(+0)}$, $\underline{f(+0)}$, $\overline{f(-0)}$, $\underline{f(-0)}$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

$\overline{f(a+0)} = \underline{f(a+0)}$ என்றால் $f(x)$-க்கு $x=a$-ன் வலப்பக்க எல்லை இருக்கிறது என்று பொருள். அதாவது $\lim_{x\to a} f(x)$ இருக்கிறது. அதேபோல் $\overline{fa(-0)} = \underline{f(a-0)}$ என்றால் $\lim_{x\to a} f(x)$ இருக்கிறது. $f(a+0)=f(a-0)$ என்றால் $\lim_{x\to a} f(x)$ இருக்கிறது.

அதாவது, $\overline{f(a+0)}$, $\underline{f(a+0)}$, $\overline{f(a-0)}$, $\underline{f(a-0)}$ என்பவை எல்லாம் சமமானால், $\lim_{x\to a} f(x)$ இருக்கிறது.

$\overline{f(a+0)} \neq \underline{f(a+0)}$ என்றால் $f(a+0)$ இல்லை.

$\overline{f(a-0)} \neq \underline{f(a-0)}$ என்றால் $f(a-0)$ இல்லை.

$f(a+0) \neq f(a-0)$ என்றால் $\lim_{x\to a} f(x)$ இல்லை.

$f(a+0), f(a-0)$ இவற்றில் யாதேனும் ஒன்று இல்லையானாலும் $\lim_{x\to a} f(x)$ இல்லை.

மேலும் சில கணக்குகள்

1. $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ என்ன ?

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ என்க.

5·14-ஐப் பயன்படுத்துவோம் :

$$f(0+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

ஆனால் h ஆனது 0-ஐ அணுக, $\sin\frac{1}{h}$ ஆனது -1-க்கும் $+1$-க்கும் இடையே வெகு வேகமாக அலைகிறது. 5·14-ன் (2)ன்படி, $\overline{f(+0)}=1$, $\underline{f(+0}=-1$,

$$\overline{f(+0)} \neq \underline{f(+0)} \quad \therefore \lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ இல்லை.}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \text{ இல்லை.}$$

2. $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$ என்ன ?

$f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ என்க.

$$f(0+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} (0+h) \sin\frac{1}{0+h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h} = 0\cdot \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}.$$

ஆனால் h ஆனது 0-ஐ அணுக, $\sin\frac{1}{h}$ ஆனது -1-க்கும் $+1$-க்கும் இடையே வெகு வேகமாக அலைகிறது.

$$\therefore f(0+0)=0 \quad \text{அதாவது } f(+0)=0$$

$$\text{இதேபோல் } f(0-0)=0 \quad \text{அதாவது } f(-0)=0$$

$$\text{அதாவது } \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

(3) $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}, \quad x \neq 0$

$= 0, \quad x=0$

என்றால் $\lim_{x\to 0} f(x)$ என்ன?

இப்போது $u_n = \frac{1}{2n}$, $v_n = \frac{1}{4n+\frac{1}{2}}$

என்றால் $\{u_n\}\to 0$, $\{v_n\}\to 0$.

$$f(u_n) = \sin\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2n}\right)} = \sin 2n\pi = 0 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(u_n)=0 \quad \therefore \{f(u_n)\}\to 0$$

$$f(v_n)=\sin\frac{\pi}{\left(\frac{1}{(4n+\frac{1}{2})}\right)}=\sin(4n+\tfrac{1}{2})\,\pi=1 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(v_n)=1 \quad \therefore \{f(v_n)\}\to 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(u_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(v_n).$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x)$ இல்லை.

(4) $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, \quad x\neq 0$

$\qquad = 0, \quad x=0$

என்றால் $\lim_{x\to 0} f(x)$ என்ன?

$$f(0+0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sin\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

h ஆனது 0-ஐ அணுக,

$\sin\frac{1}{h}$ ஆனது -1-க்கும், $+1$-க்கும் இடையே அலைகிறது.

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}=+\infty. \ (h>0).$

$\therefore f(0+0)$ ஆனது $-\infty$-க்கும் $+\infty$-க்கும் இடையே முடிவின்றி அலைகிறது.

$\overline{f(+0)}=+\infty, \quad \underline{f(+0)}=-\infty. \quad \therefore f(+0)$ இல்லை.

இதுபோல் $f(-0)$ இல்லை.

$\therefore \lim_{n\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ இல்லை.

(5) $[x]$ என்றால் x-ன் மீப்பெரிய முழுவெண் பாகம். (இம் முழுவெண் x-ஐ விடப் பெரியதல்ல).

உதாரணமாக $[3\frac{1}{4}]=3$, $[3]=3$,

$[-\frac{1}{3}]=[-1+\frac{2}{3}]=-1, [-\frac{4}{3}]=[-2+\frac{2}{3}]=-2$,

$[\frac{1}{3}]=0$.

இந்த உதாரணங்களில், பின்னமானது நேர் என்பதை நோக்குக. x என்பது மெய்யெண்ணானால்,

$f(x)=[x]$, $n<x<n+1$ என்க.

$$h>0,\ n<x<n+h,\ \lim_{x\to n^+}[x]=\lim_{h\to 0}[n+h]=\lim_{h\to 0}(n)$$

$\because$ $h>0$, சிறியது

$$=n$$

ஆனால்,

$$\lim_{x\to n^-}[x]=\lim_{h\to 0}[n-h]$$

$h>0$, சிறியது என்பதால், $h=1-\delta$, $1>\delta>0$ என்க.

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}[n-h]=\lim_{h\to 0}[n-1+\delta]=\lim_{h\to 0}(n-1)=n-1$$

$$f(n+0)\neq f(n-0)$$

$\therefore$ $\lim_{x\to n}[x]$ இல்லை.

(6) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ என்றால் $\lim_{x\to 0}f(x)$ என்ன?

$x<0$ என்றால், $|x|=-x$ $\therefore$ $x=-y$, $y>0$ என்றால், $|x|=y$

$$\therefore\ x<0 \text{ என்றால், } f(x)=\frac{x}{|x|}=\frac{-y}{y}=-1$$

$$x>0 \text{ என்றால், } |x|=x,\ \therefore f(x)=\frac{x}{|x|}=1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0-0}f(x)=-1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \therefore \lim_{x \to 0} f(x)$$ இல்லை.

(7) $\lim_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ என்ன? $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ என்க.

$\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$. ஏனெனில் $f(0+h) = 2^{\frac{1}{h}}$

$$\therefore \quad f(+0) = \lim_{h \to 0} 2^{\frac{1}{h}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{h \to 0} 2^{\frac{1}{0-h}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2^{1/h}} = 0$$

$$\because \lim_{x \to 0^+} 2^{1/x} \neq \lim_{x \to 0^-} 2^{1/x}$$

$\therefore \lim_{x \to 0} 2^{1/x}$ இல்லை.

(8) $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} h(x) = A$, a-ன் அண்மையில் எல்லா x-க்கும் $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ என்றால், $\lim_{x \to a} g(x) = A$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} h(x) = A$ என்பதால்,

$0 < |x - a| < \delta_1 \to \quad |f(x) - A| < \epsilon$, அதாவது, $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$

$0 < |x - a| < \delta_2 \to \quad |h(x) - A| < \varepsilon$, அதாவது, $A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$

என்றவாறு δ_1, δ_2 என்ற எண்கள் உள்ளன.

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ என்றால்,

$0 < |x - a| < \delta$-ன் எல்லா x-க்கும்

$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$

அதாவது,

$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon$

$\therefore \lim_{x\to a} g(x)=A.$

(9 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$ என்ன?

கோண கணித (Trigonometry) வாயிலாக,

$\sin x<x<\tan x$ {x என்பது ஆரையன் (Radian)}

$\therefore 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ ($\because \sin x>0$)

$\therefore \lim_{x\to 0^+} 1<\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}<\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}$

$1<\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}<1$

$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1$

$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

இப்போது

$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(0-h)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{-h}$ $(h>0)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$

$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(10) $\lim_{n\to\infty} x^n$ $(-1\leq x\leq 1)$ என்ன?

$1+h>0$, $n \geqq 2$ என்றால் $(1+h)^n > 1+nh$ (பெர்னோலியின் சமனின்மை)

இப்போது $-1<x<1$ என்றால்,

அதாவது $|x|<1$ என்றால்,

$$|x|^n = \frac{1}{1+h} \quad (h>0) \text{ என்று எழுதுவோம்.}$$

$$\therefore \ |x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} \quad \text{(பெர்னோலியின் சமனின்மை)}$$

$\varepsilon>0$ என்றால், போதிய அளவு பெரிய n-க்கு, $1+nh<\varepsilon$ $|x|^n<\varepsilon$.

$$\therefore \ n > \frac{\frac{1}{\epsilon}-1}{h} \text{ என்றால் } |x|^n<\epsilon.$$

$$\therefore \ |x|<1 \text{ என்றால் } \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

இப்போது, $x=1$ என்றால், $x^n=1$. $\therefore \lim_{n\to\infty} x^n=1$.

$x=-1$ என்றால், $x^n = -1$, n ஒற்றை
$+1$, n இரட்டை

$\therefore$ n ஆனது ∞-ஐ அணுக, x^n ஆனது -1-க்கும் $+1$-க்கும் இடையே அலைகிறது.

(11) f-ன் வரையறை அரங்கம் $(0, 1)$ என்றும், $f(x)=x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\forall x$ in $(0, 1)$ என்றும் கொண்டால், கோஷியின் வரையறை வழி, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ எனக் காண்பிக்க.

$\epsilon>0$ என்றும், $\epsilon=\delta$ என்றும் கொள்க.

x ஆனது $(0, 1)$-ல் இருந்தால்,

$$0<|x-0|<\delta \rightarrow |x|<\delta$$
$$\rightarrow |x|<\epsilon$$
$$\rightarrow |x| \cdot 1<\epsilon$$

$$\rightarrow |x| \left|\sin\frac{1}{x}\right| < \epsilon \quad \because \left|\sin\frac{1}{x}\right| < 1$$

$$\rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$$\rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon$$

$$\rightarrow |f(x) - 0| < \epsilon$$

$\therefore$ கோஷியின் வரையறைப்படி, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ எனக் காண்பிக்க.

யாதாமொரு $M>0$ என்க.

$0 < |1-x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ என்றால்

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}. \quad \text{அதாவது } \frac{1}{(1-x)^2} > M$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$

5·15. வரம்புடைச் சார்புகள் (Bounded Functions)

வரை இலக்கணம் 1

f என்பது I இடைவெளியின் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு என்றும் I-ன் எல்லா x-க்கும் $|f(x)| \leq M$ என்றவாறு M என்ற எண் இருக்குமானால் I-ன் மீது f ஆனது வரம்புடைத்து என்பர். அப்படியொரு M இல்லையெனில் f ஆனது வரம்பற்றது என்பர்.

உதாரணங்கள்: (1) f-ன் வரையறை அரங்கம் $-\infty < x < +\infty$ என்றும் $f(x) = \sin x$ என்றும் கொண்டால், எல்லா x-க்கும் $|\sin x| \leq 1 = M$ என்பதால் f ஆனது வரம்புள்ளது.

(2) f-ன் வரையறை: $0 < x < 1$

$f(x) = 1$, x விகிதமுறு எண்.

$\quad = 0$, x விகிதமுறாத எண்.

f ஆனது வரம்புடைத்து.

(3) f-ன் வரையறை: $0<x<1$.

$f(x)=\frac{1}{x}$ என்றால், f ஆனது வரம்பற்றது. ஏனெனில் x ஆனது 0-ன் அண்மையில் இருக்கும் போது, $f(x)$ ஆனது மிகமிகப் பெரிதாயுள்ளது.

வரை இலக்கணம் 2

a-ஐ மையமாகக் கொண்ட அண்மையில் f ஆனது வரம் புடைத்து என்றால், x ஆனது a-ஐ அணுக, f ஆனது வரம் புடைத்து என்பர்.

வரை இலக்கணம் 3

எல்லா x-க்கும் $|x|>N$ என்றவாறு $N>0$ என்ற எண் இருந்து, f ஆனது வரம்புள்ளது என்றால், x ஆனது ∞-ஐ அணுக f ஆனது வரம்புடைத்து என்பர்.

தேற்றம் 1

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, b ஒரு முடிவுள்ள எண் என்றால், $x\to a$ என்னும் போது, f ஆனது வரம்புள்ளது.

நிறுவல்

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ என்பதால், ஒவ்வொரு $\epsilon>0$க்கும், ஒரு $\delta>0$ ஆனது, $0<|x-a|<\delta\to|f(x)-b|<\epsilon$ என்றவாறு இருக்கிறது.

அதாவது $|f(x)|<|b|+\epsilon$

$\therefore$ 5·15, வரை இலக்கணம் 2-ன் படி, f ஆனது வரம் புடைத்து.

தேற்றம் 2

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b(\neq 0)$ என்றால் $x\to a$ என்னும் போது $\frac{1}{f(x)}$ ஆனது வரம்புடைத்து என நிறுவுக.

நிறுவல்

கொடுக்கப்பட்ட யாதானுமொரு $\epsilon>0$-க்கு, $x=a$-ன் அண்மையில் $|f(x)-b|<\epsilon$, அதாவது. $||f(x)|-|b||<\epsilon$, அதாவது, $|b|-\epsilon<|f(x)|<|b|+\epsilon$.

$$\therefore \frac{1}{|b|-\epsilon}>\frac{1}{|f(x)|}>\frac{1}{|b|+\epsilon}$$

$\therefore \dfrac{1}{f(x)}$ ஆனது வரம்புடைத்து.

5·16. ஓரியல்புச் சார்புகள் (Monotonic Functions)

வரை இலக்கணம்

I என்ற இடைவெளிமீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு சார்பு f என்க. I-ன் ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகள் x_1, x_2-க்கு, $x_1<x_2\rightarrow f(x_1)\leqq f(x_2)$ என்றால் f ஆனது ஏறும் சார்பு (increasing function) எனப்படும்.

$x_1<x_2\rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ என்றால் f-ஐக் "கண்டிப்பாய் ஏறும் சார்பு" (strictly increasing function) என்போம்.

I-ன் ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகள் x_1, x_2-க்கு, $x_1<x_2\rightarrow f(x_1)\geqq f(x_2)$ என்றால் f ஆனது இறங்கும் சார்பு அல்லது குறையும் சார்பு (decreasing function) எனப்படும்.

$x_1<x_2\rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ என்றால் f-ஐக் "கண்டிப்பாய் குறையும் சார்பு" (strictly decreasing function) என்போம்.

பொதுவாக, f ஆனது I-ன் மீது ஏறினாலோ, இறங்கினாலோ அதாவது f ஆனது ஏறும் சார்பாகவோ, இறங்கும் சார்பாகவோ இருந்தால், f-ஐ I-ன் மீதான ஓரியல்புச் சார்பு (monotonic function on I) என்போம்.

தேற்றம்

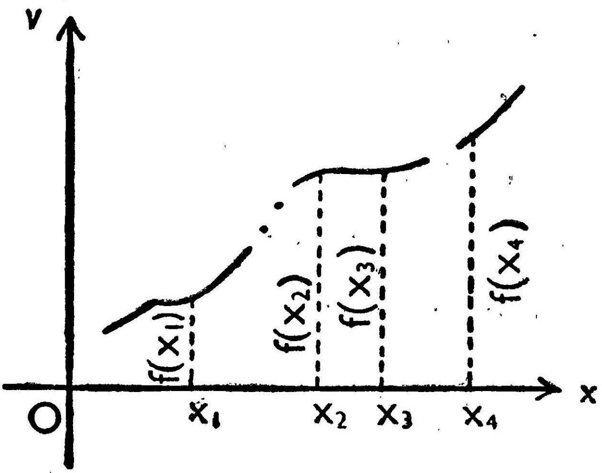
f-ன் வரையறை அரங்கம் $[a,b]$ என்ற இடைவெளி என்க. $f(a)\neq f(b)$ என்றும் கொள்க.

f ஆனது ஏறும் சார்பென்றால் $f([a,b])\subset[f(a),f(b)]$ என்றும் f ஆனது இறங்கும் சார்பென்றால் $f([a,b])\subset[f(b),f(a)]$ என்றும் நிறுவுக.

நிறுவல்

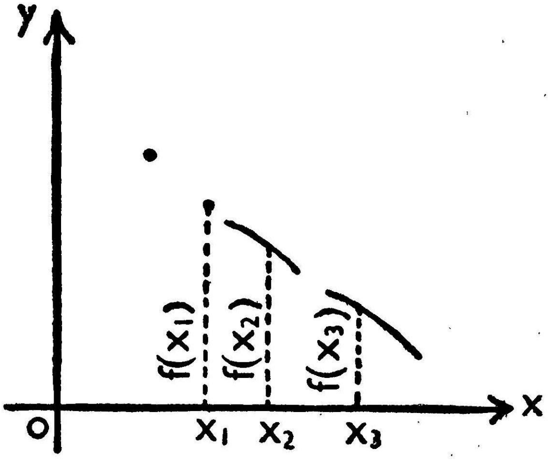
பாகம் 1. f ஆனது $[a,b]$-ன் மீது ஏறும் சார்பென்க.

$[a,b]$-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும், $a\leqq x\leqq b$.



படம் 42

ஓரியல்புச் சார்பு [(ஏறும் சார்பு $f(x_2)=f(x_3)$]



படம் 43

ஓரியல்புச் சார்பு (கண்டிப்பாய் இறங்கும் சார்பு)

$\therefore f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, f ஆனது ஏறும் சார்பு.

$\therefore f(x) \in [f(a), f(b)]$, $\forall x \in [a,b]$, ஏறும் சார்பின் வரை இலக்கணப்படி.

$\therefore f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$

பாகம் 2. $\therefore$ இஃது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்ற இடைவெளி என்றும், $a \in I$ என்றும் கொள்க. $\lim_{x \to a} f(x) = l$, $\lim_{x \to a} f(x) = l'$ என்றால் $l = l'$ என்று நிறுவுக.

(அதாவது, $f(x)$-க்கு ஒரே ஒரு எல்லைதான் உண்டு.)

2. $\lim_{x \to a} f(x) = l$ என்றால் $\lim_{x \to a} |f(x)| = |l|$ என்று நிறுவுக.

மேலும், $l = 0$ என்றாலொழிய, இதன் மறுதலை உண்மையாகாதென்றும் காண்பிக்க.

(விடை: $\varepsilon > 0$, $0 < |x-a| < \delta \rightarrow \big|\,|f(x)| - |l|\,\big| < \varepsilon$ என்றவாறு ஒரு $\delta(\varepsilon) > 0$ இருக்கிறது எனக் காண்பித்தால் போதும்.

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ என்பதால், $\varepsilon > 0$, $0 < |x-a| < \delta \rightarrow$
$|f(x) - l| < x$

என்றவாறு ஒரு $\delta(\epsilon)$ இருக்கிறது.

$$\therefore \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \qquad \ldots\ldots (1)$$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று :

$l = 0$ என்றால் $|f(x)| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = 0 \leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = 0.$$

$l > 0$ என்றால், $|l| = l$. $l - \varepsilon > 0$ என்க.

$\therefore$ (1)-ன்படி, $-\epsilon < |f(x)| < l + \varepsilon$

(அ-து) $|l| - \varepsilon < |f(x)| < |l| + \epsilon$, $0 < |x-a| < \delta$

$\therefore \lim_{x \to a} |f(x)| = |l|$

$l<0$ என்றால், $l=-m$, $m>0$ என்க.

$$\therefore\ |l|=m$$

$\therefore$ (1)-ன்படி, $-m-\varepsilon<f(x)<-m+\epsilon$

(அ-து) $m+\epsilon>-f(x)>m-\epsilon$, $0<|x-a|<\delta$

(அ-து) $m-\epsilon<-f(x)<m+\epsilon$

(அ-து) $|m|-\epsilon<|-f(x)|<|m|+\epsilon$

(அ-து) $|m|-e<|f(x)|<|m|+\epsilon$

(அ-து) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|m|=m=|l|$

$\therefore$ கணக்கின் முதல் பாகம் நிறுவப்பட்டது.

இப்போது, கணக்கின் இரண்டாவது பாகத்தை நிறுவ, ஒரு எதிர் உதாரணத்தைத் (Counter example) தருவோம்.

f-ன் வரையறை அரங்கம் $[-1,1]$ என்றும்

$f(x)=1$, $x=\frac{1}{n}$ என்றால் (n ஆனது நேர் அல்லது குறை முழுவெண்)

$=-1$, மற்ற x-களுக்கு என்றும் கொள்க.

இதன்படி, $|f(x)|=1$, $[-1,1]$-ன் எல்லா x-க்கும்.

$$\therefore \lim_{x\to 0}|f(x)|=1$$

இப்போது $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ என்ன எனக் காண்போம்.

$x=0$-ன் ஒவ்வொரு அண்மையிலும், $\frac{1}{n}$-ஐப் போன்ற புள்ளிகளும், n ஆனது முழு வர்க்கமல்லாத $\frac{1}{\sqrt{n}}$-ஐப் போன்ற புள்ளிகளும் உள்ளன. இந்த அண்மை $0<|x|<\delta$ என்க.

$x=\frac{1}{n}$ என்றால் $f(x)=1$ என்றும், $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$ என்றால் $f(x)=-1$ என்றும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. $\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ இல்லை.

$\therefore$ $l\neq 0$ என்றால் மறுதலை உண்மையாகாது.]

3. $\lim_{x\to a} f(x)=l$, $\lim_{y\to l} g(y)=g(l)$ என்றால்

$\lim_{x\to a} g(f(x))=g\left(\lim_{y\to a} f(x)\right)=g(l)$ என நிறுவுக.

(விடை : $g(f(x)=g(y)$, $y=f(x)$ என்க.

$\lim_{y\to l} g(y)=g(l)$, என்பதால், $\varepsilon>0$க்கு, ஒரு நேரெண் δ ஆனது, $0<|y-l|<\delta\to|g(l)-g(y)|<\epsilon$ என்றவாறு, இருக்கிறது.

அதாவது, $|f(x)-l|<\delta\to|g(l)-g(f(x))|<\varepsilon$ ...... (i)

மேலும் $\lim_{x\to a} f(x)=l$ என்பதால், ஒரு நேரெண் n ஆனது, $0<|x-a|<n\to|f(x)-l|<\delta$ ...... (ii)

(i)-ஐயும், (ii)-ஐயும் சேர்த்தால்,

$0<|x-a|<n\to|g(l)-g(f(x))|<\epsilon$

$\therefore \lim_{x\to a} g(f(x))=g(l)=g\left(\lim_{x\to a} f(x).\right)$

4. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\epsilon$ எனக் காண்பிக்க.

5. $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$ என நிறுவுக.

6. $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$ என நிறுவுக.

7. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

8. $f(x)=0,\quad x=0$

$=(1+e^{1/x})^{-1},\quad x\neq 0$

என்றால் $\lim_{x\to 0} f(x)$ இல்லை எனக் காண்பிக்க.

9. $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$ (விடை: $f(1+0)=+\infty$, $f(1-0)=-\infty$

∴ எல்லை இல்லை.

10. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3}$ (விடை: $f(3+0)=f(3-0)=2$.

∴ எல்லை $=2$.

மற்றொரு முறை : $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

$$\therefore \frac{x^2-4x+3}{x-3}=\frac{(x-3)\ (x-1)}{(x-3)}=x-1 \quad \because \ x\neq 3.$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} x-1=2.)$$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

(விடை : $f(\mathrm{x}) = \frac{e^x-1}{x}$

$$\therefore f(0+h)=\frac{e^h-1}{h}=\frac{(1+h+\frac{h^2}{2!}+\cdots)-1}{h}$$

$$=1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots$$

$$\therefore f(+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=1$$

அதே போன்று, $f(0-h)=\frac{e^{-h}-1}{-h}=\frac{(1-h+\frac{h^2}{2!}-\frac{h^3}{3!}+\cdots)-1}{-h}$

$$=1-\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}-\cdots$$

$$\therefore f(-0)=\lim_{x\to 0} f(0-h)=1$$

$f(+0)=f(-0)=1$ என்பதால், வேண்டிய எல்லை $=1$.

12. $\lim_{x \to \infty} 2^{1/x}$

(விடை : $\frac{1}{x} = y$ என்றால், வேண்டியது $\lim_{y \to 0} 2^y$

$\therefore f(y) = 2^y$ என்றால், $f(0+h) = 2^h$

$\therefore f(+0) = \lim_{h \to 0} 2^h = 1.$

$f(0-h) = 2^{-h}$

$\therefore f(-0) = \lim_{h \to 0} 2^{-h} = 1$

$\because f(+0) = f(-0) = 1$ $\therefore$ வேண்டிய எல்லை $= 1$).

13. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - e^{1/x}}$

(விடை : $f(x) = \frac{1}{1 - e^{1/x}}$ என்றால்

$$f(0+h) = \frac{1}{1 - e^{1/h}}$$

$\therefore f(+0) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = 0$

அதேபோல், $f(0-h) = \frac{1}{1 - e^{-(1/h)}}$

$\therefore f(-0) = \lim_{h \to 0} f(0-h) = 1$ $\because h \to 0 \to e^{-(1/h)} \to 0.$

$f(+0) \neq f(-0)$ $\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - e^{1/x}}$ இல்லை.)

14. $\lim_{x \to 0} 2^{-(1/x^2)}$

(விடை : 0)

15. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \tan x$

(விடை : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi - 0} \tan x = \infty$ ஆனால் $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi + 0} \tan x = -\infty$

∴ எல்லை இல்லை.)

16. $\lim\limits_{x \to 1} 2^{1/x}$

(விடை : $f(x) = 2^{1/x}$ என்றால், $f(1+0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{2^{1+h}} = 2$

ஆனால் $f(1-0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{2^{1-h}} = 2$

$\because f(1+0) = f(1-0) = 2, \quad \therefore \lim\limits_{x \to 1} 2^{1/x} = 2$)

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

(விடை : $y = \frac{1}{x}$ என்க.

$x > 0 \quad \therefore y > 0$ என்க.

x ஆனது நேர் மதிப்புகள் வழி குறைய, $\frac{1}{x}$ ஆனது அதிகமாகும்.

∴ K என்பது யாதாமொரு நேர் எண் என்றால்

$x < \frac{1}{K}$ என்றவாறு, அதாவது, $\frac{1}{x} > K$ என்றவாறு ஒரு K-ஐ எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

$x < 0. \quad \therefore y < 0$ என்க.

x ஆனது குறை மதிப்புகள் வழி 0-ஐ அணுக, $\frac{1}{x}$ ஆனது குறைகிறது.

$\therefore$ K என்பது யாதாமொரு நேர் எண்ணானால்,

$x > -\frac{1}{K}$, அதாவது $\frac{1}{x} < -K$ என்றவாறு ஒரு K இருக்கிறது.

$$\therefore \quad \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\because \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}. \quad \therefore \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ இல்லை.})$$

18. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$

(விடை : $\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} = \frac{1-e^{\frac{1}{1/x}}}{1+e^{\frac{1}{1/x}}}$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} = 1 \quad \because \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

அதேபோல், $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} = -1 \quad \because \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\therefore f(+0) \neq f(-0) \quad \therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ இல்லை.)

19. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

(விடை : ∞)

20. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{1/x^2}}$

(விடை : 0)

6. சார்புகளின் தொடர்ச்சி
(Continuity of Functions)

தற்காலத்திய பகுப்பாய்வு இயலிலும், அதிலும் குறிப்பாக இடவியல் (Topology), சார்பாய்வியல் (Functional Analysis) — இவற்றிலும் சார்புத் தொடர்ச்சி (Continuity) ஆனது அடிப்படைக் கருத்(Fundamental concept)தாகும். முன் அத்தியாயத்தின் சார்பின் எல்லையை ஒட்டித்தான், சார்புத் தொடர்ச்சியை வரையறுக்கப் போகிறோம். சார்பின் எல்லையை (limit of a function) வரையறுத்தபோது, அதாவது, $\lim_{x\to c} f(x)=l$ என்றபோது, f ஆனது $x=c$ என்றவிடத்து வரையறுக்கப்பட வேண்டிய தேவை இல்லை என்றும், l ஆனது $f(c)$ ஆக இருக்கத் தேவை இல்லை என்றும் குறிப்பிட்டோம். ஆனால் $f(c)$ வரையறுக்கப்பட்டு $l=f(c)$ என்றும் இருந்தால், சார்புத் தொடர்ச்சியை வரையறுக்கத் தயாராய் இருக்கிறோம்.

6·1. வரை இலக்கணம் I—கோஷியின் வரை இலக்கணம் (Cauchy's Definition)

"ஒரு புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சி" (Continuity at a Point) : சார்பு f-ன் வரையறை அரங்கம் இடைவெளி I என்றும், $a\in I$ என்றும் கொண்டால், $\epsilon>0$க்கு ஒத்த ஒரு நேர் எண் δ ஆனது,

$$0\leq |x-a|<\delta\rightarrow |f(x)-f(a)|<\epsilon$$

என்றவாறு இருந்தால், f ஆனது a இடத்து தொடர்ச்சியாயுள்ளதென்போம்.

ஆகையால், $\lim_{x\to a} f(x)$ ஆனது

(i) இருக்கவேண்டும் (exists)

(ii) முடிவுள்ளதாக இருக்க வேண்டும் (finite)

(iii) $f(a)$-க்குச் சமமாக வேண்டும்

என்றவாறு இருந்தால்தான் சார்பு f ஆனது $=xa$ என்ற இடத்து தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்போம்.

இம்மூன்று நிபந்தனைகளில் யாதானும் ஒன்று தவறினாலும் f ஆனது $x=a$ என்ற புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சி ஆகாது.

f ஆனது $x=a$ என்ற இடத்து வரையறுக்கப்படவேண்டும் என்பது (iii)-ஆல் தெள்ளிதின் விளங்குகிறது.

இதனையே சற்று விரித்தால், f-ன் வரையறை அரங்கம் இடைவெளி I; $a \in I$;

(i) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ஆனது முடிவுள்ள ஒரு எண்.

(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ஆனதும் முடிவுள்ள எண்.

(iii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

(iv) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

என்றவாறு இருந்தால்தான் f ஆனது $x=a$ என்ற புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சி யுள்ளதென்போம். இவற்றில் யாதானும் ஒன்று தவறினாலும்கூட, f ஆனது $x=a$ என்ற இடத்து தொடர்ச்சி அற்றது என்று சொல்லிவிடுவோம்.

இப்படியும் கீழ்க்கண்டவாறும் கூறலாமல்லவா?

(i) $f(a)$ஆனது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

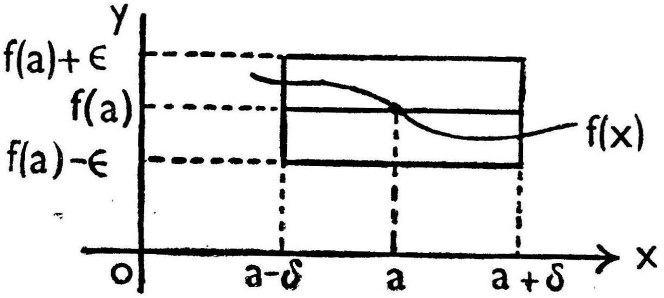
(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ இருக்கிறது.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$

என்றால்தான் f ஆனது $x=a$ என்ற புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சி

யாயுள்ளது என்போம், இல்லையேல், f ஆனது $x=a$ என்ற இடத்து தொடர்ச்சி யற்றது என்று சாற்றிடுவோம்.

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ என்றால் என்ன? ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கும் ஒரு $\delta > 0$ ஆனது $a-\delta < x < a+x$ என்ற இடைவெளியில் ஒவ்வொரு x-க்கும் $f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$ என்றவாறு இருக்கிறது என்பதுதானே பொருள்? இதனைக் கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தின் மூலம் விளக்குவோம். $a-\delta < x < a+\delta$ என்ற இடைவெளிக்கு ஒத்த $f(x)$-ன் வரைபடமாவது, $[a, f(a)]$-ஐ மையமாகக் கொண்ட, 2δ நீளமும், 2ϵ அகலமும் கொண்ட செவ்வகத்தின் உள்ளே முழுமையாக இருப்பதைக் கவனிக்க.



படம் 44

வரை இலக்கணம் 2

(புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சி) "ஹைனெ"-யின் வரை இலக்கணம் (Heine's Definition): சார்பு f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்ற இடைவெளி என்றும், a என்ற புள்ளி I-ல் இருக்கிறதென்றும், எல்லா n-க்கும் $x_n \in I$ என்றும் கொள்க. a-க்கு ஒருங்கும் ஒவ்வொரு $\{x_n\}$-க்கும் ஒத்த $\{f(x_n)\}$ என்ற ஒழுங்கு வரிசை $f(a)$-க்கு ஒருங்கிஞல் f ஆனது $x=a$ என்ற புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்போம்.

அதாவது, $\lim_{n \to \infty} x_n = a \to \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$ என்றால்தான் f ஆனது $x=a$ என்றவிடத்தும், தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

தேற்றம் 1

ஒரு புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சிக்கான "கோஷி"யின் வரை இலக்கணமும், "ஹைனெ"யின் வரை இலக்கணமும் முற்றிலும்

ஒரே பொருளுடையன என நிறுவுக. இதனையே, f-ன் வரையறை அரங்கம் I இடைவெளி என்றும், a என்ற புள்ளி I-ல் இருந்தால் a என்ற புள்ளியிடை f-ன் தொடர்ச்சிக்கான வேண்டிய போதிய நிபந்தனையாவது: எல்லா n-க்கும் $x_n \in I$ என்றால், $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = a$ என்றவாறு உள்ள ஒவ்வொரு ஒழுங்கு வரிசை $\{x_n\}$-க்கும், $\lim_{n\to\infty} \{f(x_n)\} = f(a)$ என்றாக வேண்டும்.

நிறுவல்

இப்போது, "கோஷி"யின் வரை இலக்கணம்→ 'ஹைனெ"-யின் வரை இலக்கணம் என நிறுவுவோம்.

கோஷியின் வரையறைப்படி, ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-க்கும், $0 \leqq |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$ என்றவாறு $\delta > 0$ இருக்கிறது. $a-\delta < x < a+\delta$ இடைவெளியில் எல்லா n-க்கும் புள்ளிகள் x_n என்பவை a-க்கு ஒருங்கும் ஒழுங்கு வரிசையை அமைக்கட்டும் அதாவது, $\{x_n\} \rightarrow a \quad \therefore |x_n - a| < \delta,\ n \geqq m$.

$$\therefore |f(x_n) - f(a)| < \epsilon,\ n \geqq m$$

$$\therefore \{f(x_n)\} \rightarrow f(a)$$

இதுதானே "ஹைனெ"-யின் நிபந்தனையும்! இப்போது "ஹைனெ"-யின் வரை இலக்கணம்→ "கோஷி" யின் வரை இலக்கணம் என்பதை நிறுவுவோம்.

"கோஷி"யின் வரை இலக்கணம் தவறு எனக்கொள்வோம். அப்படியானால் $|f(x) - f(a)| > \epsilon (> 0)$ என்றவாறு புள்ளிகள் x என்பவை $a-\delta < x < a+\delta$ என்ற இடைவெளியில் இருக்கும்.

$\{\delta_n\}$ என்பது 0-க்கு ஒருங்கும் இறங்கும் ஒழுங்கு வரிசையென்றும், $(a-\delta_n,\ a+\delta_n)$-ல் $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ என்றவாறு x_n என்பது ஒரு புள்ளியென்றும் கொண்டால், ஒவ்வொரு n-க்கும் $|f(x_n) - f(a)| > \epsilon$ என்றவாறு a-க்கு ஒருங்கும் ஒழுங்கு வரிசை $\{x_n\}$ இருக்கிறது என்பது உண்மையாகும். இஃது "ஹைனெ"-யின் வரை இலக்கணத்துக்குப் புறம்பானது.

∴ "கோஷி" உண்மையல்ல → "ஹைனெ" உண்மையல்ல என்று நிறுவினோம். கணிதத் தர்க்க நூலின்படி, 'ஹைனெ"→ "கோஷி".

குறிப்புகள்

1. f ஆனது $x=a$ என்ற இடத்துத் தொடர்ச்சியுள்ள தென்றால், ஒரு நிபந்தனையாவது, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ என்றோம் அல்லவா?

இதனால் $\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$ என்பது உள்ளங்கை நெல்லிக்கனி யன்றோ! அதாவது, lim-க்குள் f-ம், f-க்குள் lim-ம் (தொடர்ச்சியில்) சமமே.

2. கோஷியின் வரை இலக்கணத்தில் x-க்குப் பதில் $a+h$-ப் பிரதியிட்டால், ஒவ்வொரு $\epsilon>0$, $0<|h|<\delta \to |f(a+h)-f(a)|<\epsilon$ என்றாகும். அதாவது $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$.

வரை இலக்கணம் 3

ஒரு முனைப் புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சி (Continuity at An End Point): f ஆனது I என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்படட்டும். a என்பது I-ன் இடது முனைப் புள்ளியானால், $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ என்றால் f ஆனது இடது முனைப் புள்ளி a யிடைத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்போம். இதனை வலப் பக்கத் தொடர்ச்சி என்போம். b என்பது I-ன் வலது முனைப் புள்ளி என்க. $\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$ என்றால் f ஆனது வலது முனைப் புள்ளி b யிடைத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்போம். இதனை இடப் பக்கத் தொடர்ச்சி என்போம்.

வரை இலக்கணம்

இடைவெளியில் தொடர்ச்சி (Continuity in An Interval): f-ன் வரையறை அரங்கம் $I\equiv[a, b]$ என்க. I-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிடை f ஆனது தொடர்ச்சியாய் இருந்தால்தான் f ஆனது இடைவெளி I-ல் தொடர்ச்சியாய் இருக்கிறதென்போம். அதாவது, c என்பது I-ல் யாதாமொரு புள்ளியெனில்,

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c),\ a<c<b$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \qquad \text{(வலப் பக்கத் தொடர்ச்சி)}$$

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b) \quad \text{(இடப் பக்கத் தொடர்ச்சி)}$$

என்பவை யாவும் உண்மையாய் இருக்கவேண்டும். அப்படியின்றி f ஆனது a,b என்ற முனைப் புள்ளிகளிடை மட்டும் தொடர்ச்சி யாயின்றி I-ன் உள் மற்றெல்லாப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடர்ச்சியாய் இருப்பின், f ஆனது திறந்த இடைவெளி $a<x<b$-ல் தொடர்ச்சி யாய் உள்ளதென்போம்.

இப்போது கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தின் மூலம் "$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ என்றால் f ஆனது a இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது" என்ற வரை இலக்கணமும், கோஷியின் வரை இலக்கணமும் முற்றிலும் ஒன்றே எனக் காண்பிப்போம்.

தேற்றம் 2

f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்ற இடைவெளி என்றும், a என்பது I-ன் ஒரு புள்ளி என்றும் கொள்க. f ஆனது a இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் இருக்க, வேண்டிய போதிய நிபந்தனை யாவது: ஒவ்வொரு $\varepsilon>0$-க்கும், ஒரு $\delta\to 0$ ஆனது, $x\in I$, $|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\epsilon$ என்றவாறு இருக்கிறது.

நிறுவல்

f ஆனது a என்ற இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென் போம். $\therefore \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. $\therefore \epsilon>0$, $x\in I$, $0\to|x-a|<\delta\to$ $|f(x)-f(a)|<\epsilon$ என்றவாறு ஒரு $\delta>0$ இருக்கிறது.

$x=a$ என்றால் $|x-a|=0$,

$x=a$ என்றால் $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$

$\therefore \quad x\in I, |x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\epsilon$. இது தான் "கோஷி"யினுடையது.

இப்போது, ஒவ்வொரு $\varepsilon>0$-க்கும், $x\in I, |x-a|<\delta\to$ $|f(x)-f(a)|<\epsilon$ என்க. $\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon>0$-க்கு ஒரு $\delta>0$ ஆனது, $x\in I$, $0<|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ என்ற வாறு இருக்கிறது. $\therefore \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

விளக்க உதாரணங்கள்

1. f-ன் வரையறை அரங்கம் (0, 10) என்க. $f(x)=2x+5$ என்றால் f ஆனது $x=1$ என்ற புள்ளி இடத்து தொடர்ச்சியாய் உள்ளது என நிறுவுக.

$f(1)=2(1)+5=7$. $\therefore$ $f(1)$ இருக்கிறது. $\epsilon>0$ என்பது யாதாமொரு எண் என்க.

$$|f(x)-f(1)| = |2x+5-7| = |2x-2| = 2|x-1|$$

$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}, 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு புள்ளி x-ஐ எடுத்துக் கொள்க.

$$\therefore 1-\frac{\epsilon}{2}<x<1+\frac{\epsilon}{2} \qquad \therefore |x-1|<\frac{\epsilon}{2}$$

$$\therefore 2|x-1|<\varepsilon$$

$$\therefore |f(x)-f(1)|<\epsilon$$

$$\therefore |x-1|<\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow |f(x)-f(1)|<\epsilon.$$

$\therefore$ வரை இலக்கணப்படி, $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ என்பதால், f ஆனது $x=1$ என்ற புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

2. f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்றும், I-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும் $f(x)=1$ என்றும் கொள்க. அப்படியானால் f ஆனது I-ன் மீது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. ஏனென விளக்க முடியுமா? முடியும். ஏனெனில் I-ன் ஒவ்வொரு புள்ளி a-க்கும், $\lim_{x\to a} f(x)=1=f(a)$.

3. f-ன் வரையறை அரங்கம் திறந்த இடைவெளி (0, 1) என்க. புள்ளி 1 இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளதா? இல்லை. ஏனெனில், புள்ளி 1 இடத்து f ஆனது வரையறுக்கப்படவில்லையே. அதாவது $f(1)$ இல்லை. ஆகவே, f ஆனது அவ்விடத்து தொடர்ச்சியாய் இல்லை.

4. ஒவ்வொரு மெய்யான x-க்கும் $f(x)=x^2$ என்றால் f ஆனது எல்லா x-க்கும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது எனலாமா? எனலாம். எப்படி? "ஹைனெ"-யின் வரை இலக்கணத்தைப் பயன்படுத்

தினால், பயன் விரைவில் கிட்டும். மெய்யெண் a-க்கு ஒருங்கும் ஒழுங்கு வரிசை $\{x_n\}$ என்க.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} x_n = a.a = a^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = a^2 = f(a).$$

$$\therefore \{x_n\} \to a \to \{x_n^2\} \to a^2$$

$\therefore$ "ஹைனெ"-யின் வரை இலக்கணப்படி, f ஆனது எல்லா மெய்யெண்கள் x-க்கும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

5. f ஆனது,

$$f(x) = 0, \quad x = 0$$
$$= x, \quad x > 0$$
$$= -x, \quad x < 0$$

என்றால், $x=0$ என்ற புள்ளியிடத்து, f ஆனது தொடர்ச்சியா யுள்ளதா?

ஆமாம். ஏனெனில், $f(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$\therefore$ f ஆனது 0 என்ற புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

6·2. தொடர்ச்சியின்மை (Discontinuity)

f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்றும் I-ன் ஒரு புள்ளி d என்றும் கொள்க. f ஆனது இப்புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சியாய் இல்லை எனில் f-ஐ $x=d$ இடத்துத் "தொடர்ச்சியற்ற சார்பு" (discontinuous function) என்போம். இப்புள்ளியைத் "தொடர்ச்சி யற்ற சார்பு" (point of discontinuity) என்பர். இடைவெளி I-ன் மீது f ஆனது தொடர்ச்சியாயில்லையெனில், f-ஐத் "தொடர்ச்சி யற்ற சார்பு" என்பர்.

a என்பது I-ன் ஒரு புள்ளி என்க. $f(a)$ இல்லையென்றாலோ, $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ இவற்றில் யாதானும் ஒன்றோ, அல்லது இரண்டுமேயோ இல்லாவிடினும். $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)\neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ என்றாலோ, $x=a$ என்ற புள்ளி f-ன் "தொடர்ச்சி இன்மைப் புள்ளி" ஆகும்.

$\overline{f(a+0)}$, $\underline{f(a+0)}$, $\overline{f(a-0)}$, $\underline{f(a-0)}$ என்பவை யாவும் சமமாயில்லை எனினும், f ஆனது $x=a$ என்ற இடத்துத் தொடர்ச்சி யற்றது.

தொடர்ச்சியின்மைகளின் பல ரகங்கள் (Types of Discontinuities)

I. தொடர்ச்சியின்மையின் முதல் ரகம் (Discontinuity of the First Kind) அல்லது சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மை (Ordinary discontinuity):

$\lim_{x\to a^-} f(x)\neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ என்றால் இந்த வகைத் தொடர்ச்சி யின்மையைப் பெறுகின்றோம். இதனைத் தாண்டும் தொடர்ச்சி யின்மை (jump discontinuity) என்றும் சொல்வதுண்டு.

II. நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை (Removable Discontinuity)

இவ்வகையில் $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)\neq f(a)$ என்றாகும்.

$x = a$ என்ற இடத்து $f(x)$-ன் மதிப்பை $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$-க்குச் சமமாக மாற்றினால், தொடர்ச்சியின்மையைத் தவிர்க்கலாம்.

$f(a+0)=f(a)\neq f(a-0)$ என்றால் $x=a$ என்பது இடப்பக்கத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும். $f(a-0)=f(a)\neq f(a+0)$ என்றால் $x=a$ என்பது வலப் பக்கத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி எனப்படும்.

III. தொடர்ச்சியின்மையின் இரண்டாவது ரகம் (Discontinuity of the Second Kind)

$\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ இவற்றில் இரண்டுமே இல்லாவிடின் f ஆனது $x=a$ என்ற புள்ளியிடத்து இரண்டாவது ரகத் தொடர்ச்சியற்ற சார்பு எனப்படும்.

அதாவது, $\overline{f(a+0)} \neq \underline{f(a+0)} \neq \overline{f(a-0)} \neq \underline{f(a-0)}$ என்ருல் $x=a$ ஒன்பது இரண்டாவது ரகத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும்.

IV. கலப்புத் தொடர்ச்சியின்மை (Mixed Discontinuity)

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ இவற்றில் யாதானும் ஒன்று முடிவுள்ளதாய் இருந்து மற்றொன்று இல்லையென்ருல் இத்தகைய தொடர்ச்சியின்மையைக் கிடைக்கப் பெறுகின்ரேம்.

அதாவது, $\overline{f(a+0)} \neq \underline{f(a+0)}$, ஆனுல் $\overline{f(a-0)} = \underline{f(a-0)} \neq f(a)$ என்ருல், $x=a$ ஆனது f-ன் வலப்பக்க இரண்டாந்தரத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளியென்றும், இடப்பக்க முதல் ரகத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளியென்றும் அறிவோம். ஆகவேதான் $x=a$-ஐ f-ன் கலப்புத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி என்கிரேம். இதுபோல் இடப்பக்க இரண்டாந்தரத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளியாகவும், வலப்பக்க முதல்ரகத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளியாகவும் $x=a$ ஆனது அமையலாம். இடப்பக்கத்திலோ வலப்பக்கத்திலோ ஒரு பக்கத்தில் இரண்டாந்தரத் தொடர்ச்சியின்மையாகவும், ஆனுல் மறுபக்கத்தில் தொடர்ச்சியாயும் இருக்கலாம்.

V. முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியின்மை (Infinite Discontinuity)

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ இவற்றில் யாதேனும் ஒன்று முடிவில்லாததாயின் $x=a$ என்பது f-ன் முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும்.

VI. அலையும் தொடர்ச்சியின்மை (Oscillatory Discontinuity)

f ஆனது $x=a$ என்ற புள்ளியின் வலது பக்கத்திலோ, இடது பக்கத்திலோ அலைந்தால் a-ஐ "அலையும் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி" யென்போம்.

முக்கிய குறிப்பு

$\overline{f(a+0)} = \underline{f(a+0)} = +\infty$ அல்லது $-\infty$, அதாவது $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ அல்லது $-\infty$ என்ருல் $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ இருக்கிறது.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ அல்லது $-\infty$ என்ருலும் $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ இருக்கிறது.

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ அல்லது $-\infty$, என்றால்,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

$f(x)$ ஆனது $x = a$ என்ற இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் இருக்கும்.

6·3. விளக்கக் கணக்குகள்

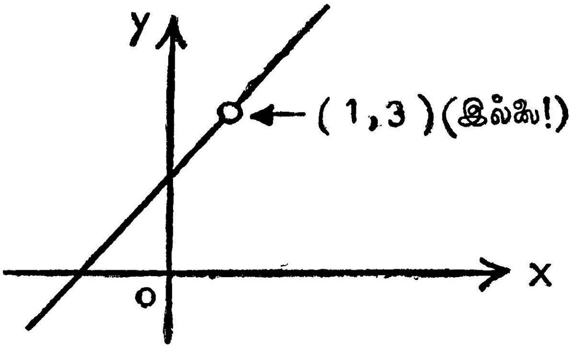
(1) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, f-ன் வரையறை: $x = 1$-ஐத் தவிர மற்றெல்லா மெய்யெண்கள் என்றால் $x = 1$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளதா? இல்லவே இல்லை. ஏனெனில், $f(1)$ ஆனது வரையறுக்கப்படவில்லை. இருப்பினும்

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} x + 2 \quad (\because x \neq 1)$$

$$= 3$$

$\therefore$ $x = 1$ என்ற புள்ளி தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி.



படம் 45

$f(1) = 3$ என்று வரையறுத்தால், (1, 3) என்ற புள்ளி வரைபடத்தின்மீது இருக்கிறது என்பதுடன், f ஆனது $x = 1$ என்ற இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. $\therefore$ $x = 1$ என்ற இடத்து f-க்கு நீக்கக் கூடிய தொடர்ச்சியின்மை இருக்கிறது.

2. $f(x)=1, \quad x\neq 0$

$\quad = 0, \quad x=0$

என்றால் $x=0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளதா ? இல்லை. ஏன் ?

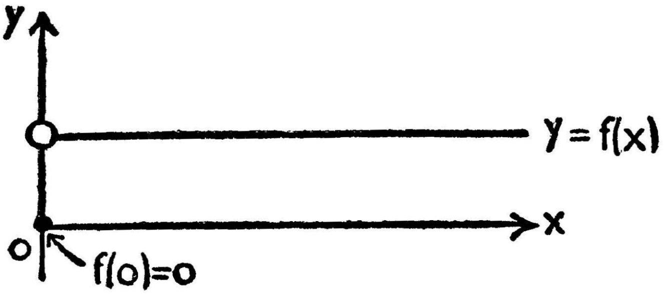
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1.$$

$$\therefore 1=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)\to\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0)$$

ஏனெனில் $f(0)=0$.

$\therefore x=0$ இடத்து f ஆனது நீங்கக்கூடிய தொடரற்ற சார்பு. ஏனெனில், $f(0)=1$ என்று மாற்றி வரையறுத்தால், தொடர்ச்சி யின்மை நீங்கி விடுகிறதே!



படம் 46

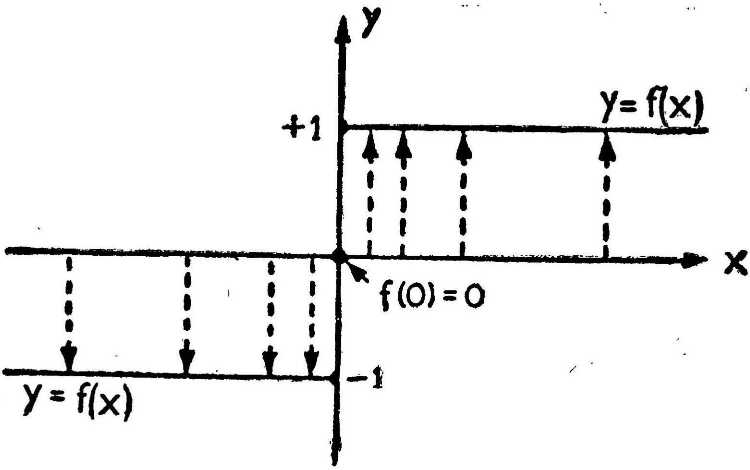
3. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}, \quad x\neq 0$

$\quad =0, \quad x=0$

இந்த f-ஐ ஸிக்னம் சார்பு (Signum function) என்பர். இந்த $f(x)$-ஐ sgn x என்றும் எழுதுவர்.

$f(+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=\lim_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}\ (h>0)=+1.$ மேலும்,

$f(-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=\lim_{h\to 0}\dfrac{|-h|}{-h}=-1.$



படம் 47

$\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1 \quad \therefore \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ இல்லை.

$\therefore$ $x=0$ ஆனது "தாண்டும் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி" (point of jump discontinuity) ஆகும்.

4. $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}, \quad x \neq 0$

$= 0, \qquad x = 0$ என்க.

இங்கே, $f(+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0}\left[\dfrac{e^{1/h}}{1+e^{1/h}}\right]$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+e^{-(1/h)}} = \frac{1}{1+\lim_{h\to 0} e^{-(1/h)}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

மேலும் $f(-0) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{-(1/h)}}{1+e^{-(1/h)}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

$f(+0) \neq f(-0)$

$\therefore$ $x=0$ என்பது முதல் ரகத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி. அதாவது தாண்டும் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி.

ஆனால், $f(0)=0$

$f(+0) \neq f(0)$. ஆனால் $f(-0) = f(0)$

$\therefore$ $x=0$ என்பது வலப்பக்க முதல் ரகத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும். $x=0$-ஐத் தவிர மற்றெல்லா புள்ளிகளிடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளது. எப்படி? இது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டது.

5. $f(x) = -1, \quad -1 > x < 0$

$= 0, \quad x = 0$

$= 1, \quad 0 < x < 1$

அத்தியாயம் 6-ல், $\lim_{x \to 0} f(x)$ இல்லை என்று கண்டோம்.

இப்பகுதியில் மேற்கண்ட 3-வது கணக்கல்லவா இது? $x=0$ ஆனது தாண்டும் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி என்றோமா? இப்போது f ஆனது $(-1, 1)$-ன் மற்றெல்லாப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. எப்படியெனில்,

$a \neq 0$ என்பது $(-1, 1)$-ல் யாதாமொரு புள்ளி என்க.

$\therefore$ a ஆனது $(-1, 0)$-லோ அல்லது, $(0, 1)$-லோ இருக்க வேண்டும்.

$0 < a < 1$ என்க. $\therefore f(a) = 1$

$\varepsilon > 0$ என்க. $0 < \delta < a$ என்க.

$-1 < x < 1$, $|x-a| < \delta$ என்றால் x ஆனது $(0, 1)$-ல் இருக்கிறது. $\therefore f(x) = 1 = f(a)$

$\therefore$ $|f(x) - (a)| = 0 < \epsilon$

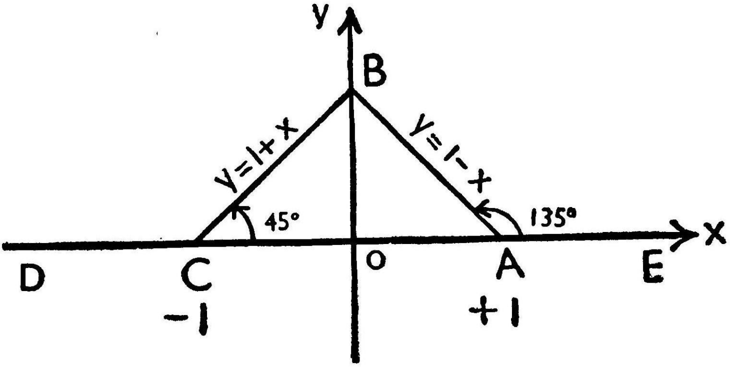
$\therefore$ $-1 < x < 1$, $|x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon > 0$ என்றவாறு $\delta > 0$ கண்டுபிடித்தாயிற்று. $\therefore$ f ஆனது $x=a$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது. இதுபோல், $-1 < a < 0$ என்றால், f ஆனது a இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளதெனக் காண்பிக்கவும்.

(6) $f(x)=0, \quad x<-1$

$=0, \quad x>1$

$=1+x, \quad -1 \leq x \leq 0$

$=1-x, \quad 0 \leq x \leq 1$



படம் 48

$x \geqq 1$ என்ற இடைவெளியில் a என்பது யாதாமொரு புள்ளி என்க. இங்கே $f(a)=0$ $\lim_{x \to a} f(x)=0=f(a)$ $\therefore$ Ax பாகத்தில் f ஆனது ஒவ்வொரு புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

$x \leqq -1$ என்ற இடைவெளியில் b என்பது யாதாமொரு புள்ளி என்க. இங்கே $f(b)=0$. $\lim_{x \to b} f(x)=0=f(b)$. CX′ பாகத்திலும் f ஆனது ஒவ்வொரு புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

$-1<x<0$ என்ற இடைவெளியில் c என்ற யாதாமொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. $\therefore f(c)=1+c$

$\lim_{x \to c} 1+x=1+c=f(c)$ $\therefore$ $(-1,0)$-ல் f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளது. இதேபோல் $(0, 1)$-லும் f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. ஆகவே, f ஆனது வரையறை அரங்கம் முழுவதிலும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

(7) $\begin{cases} f(x) = \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

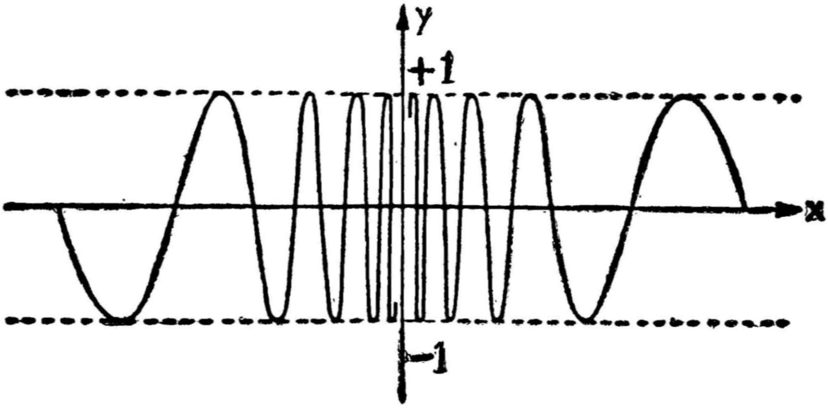
சென்ற அத்தியாயத்தில் $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ இல்லை என்று படித்தோம்.

$\therefore$ $x=0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியற்றது.

இந்தத் தொடரின்மை, நீக்கக்கூடியதோ அல்லது தாண்டு வதோ அல்ல ; ஆனால் இரண்டாம் ரகத்தைச் சேர்ந்தது.

ஏனெனில், $\overline{f(+0)} = +1, \underline{f(+0)} = -1 \quad \therefore \overline{f(+0)} \neq \underline{f(+0)}$

இதுபோல், $\overline{f(-0)} \neq \underline{f(-0)}$



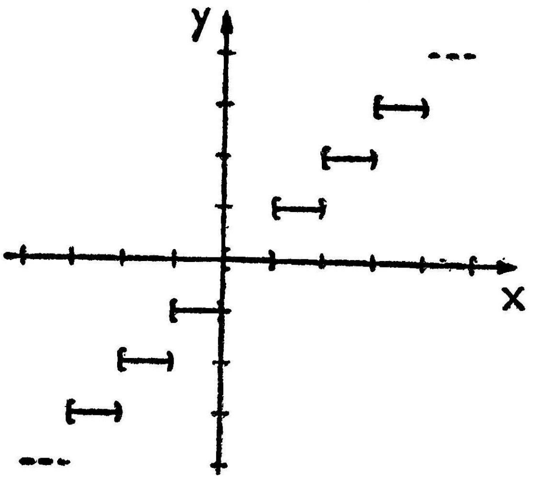
படம் 49

(8) மீப்பெரிய முழுவெண் சார்பு (Greatest integer function), அல்லது அடைப்புச் சார்பு (Bracket function)

$f(x)=[x] \;\; \forall x \in (n, n+1)$

அதாவது $f(x)=[x]=n, \quad n \leq x < n+1, \quad n$ முழுவெண் $\lim_{x\to n} [n]$ இல்லை என்று சென்ற அத்தியாயத்தில் கண்டோம்.

$\therefore$ ஒவ்வொரு முழு எண் n இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சி யற்றது. முழுவெண் அல்லாத மற்ற n-க்கு, f ஆனது தொடர்ச்சி யாயுள்ளது. இத்தொடர்ச்சியின்மை தாண்டும் தொடர்ச்சியின்மை யாகும்.



படம் 50

(9) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1/x}}$, $\forall x$ என்றும் $f(0)=0$ என்றும் கொண்டால் $x=0$ என்ற புள்ளி எந்த வகைத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி?

$$f(+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-e^{1/h}}=0$$

$$f(-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-e^{-(1/h)}}=1$$

$$f(0)=0$$

$f(+0)\neq f(-0)$ என்பதால் f-க்கு $x=0$ என்பது முதல் ரகத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி.

$f(+0)=f(0)$ ஆனால் $f(-0)\neq f(0)$ என்பதால் $x=0$ என்பது இடதுபக்க முதல் ரகத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி.

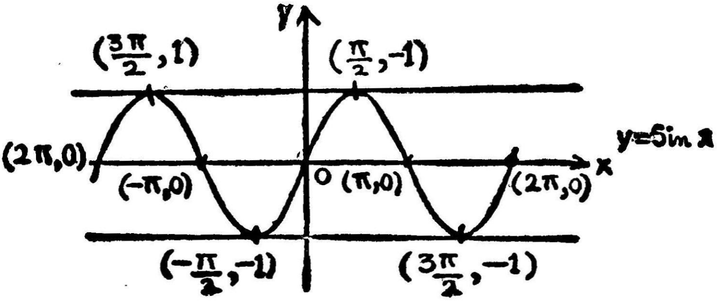
(10) $f(x)=\sin x$, $\forall x$ என்றால் f ஆனது எல்லா x-க்கும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதெனக் காண்பிக்க:

x-ன் யாதாமொரு மதிப்பு a என்க.

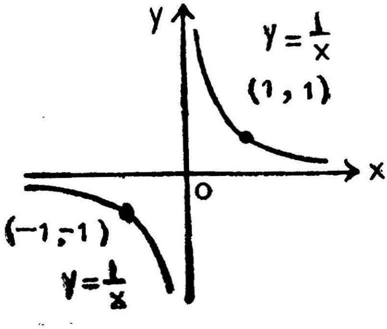
$\epsilon>0$ என்க. $|x-a|<\epsilon$

$$|f(x)-f(a)| = |\sin x-\sin a|$$
$$= \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|$$
$$= \left|2\cos\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$$
$$= 2\cdot 1\left|\frac{x+a}{2}\right| \quad \because \left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqq 1,$$
$$\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqq \left|\frac{x-a}{2}\right|$$
$$= |x-a|$$
$$< \epsilon$$

$\therefore f$ ஆனது $x=a$ என்ற இடத்து தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. a என்பது யாதாமொரு எண் என்பதால், f ஆனது எல்லா இடத்தும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.



படம் 51



படம் 52

11. $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\neq 0$

$\quad = 1, \quad x=0$

என்றால் $x=0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளதா?

$f(+0)=\infty, f(-0)=-\infty,$

$f(0)=1$

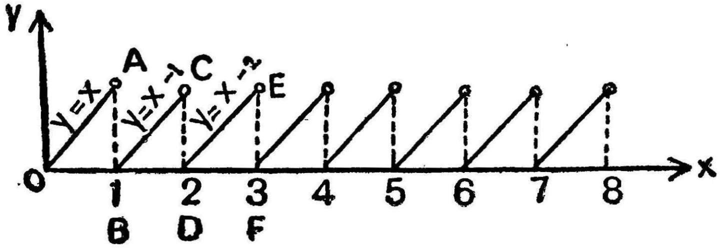
$\therefore$ $x=0$ இடத்து f ஆனது முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியின்மையாய் உள்ளது.

$$(12)\quad \begin{cases} f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0 \\ \quad\;\; = 0, & x=0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$-ம், $\lim_{x\to 0^-} f(x)$-ம் இல்லை.

$\therefore$ $x=0$ இடத்து f ஆனது இரண்டாம் ரகத் தொடர்ச்சியின்மையாய் உள்ளது.

(13) $f(x)=x-[x]$, $\forall\, x>0$ என்றால் $x=1$ என்ற புள்ளிக்கும் f-ன் தொடர்ச்சிக்கும் உள்ள உறவென்ன?



படம் 53

$f(0)=0$.

$0\leqq x<1$, $[x]=0$ $\therefore$ இங்கே $f(x)=x$. $\therefore$ வரைபடம் $y=x$ என்ற நேர்க்கோடு OA (A-ஐத் தவிர)

$x=1$, $[x]=1$ $\therefore$ $f(1)=0$ $\therefore$ $x=1$ என்னும்போது வரைபடம் B-க்குக் குதிக்கிறது.

(அதாவது, $(0,1)$-ல் எல்லா x-க்கும், வரைபடம் O-விருந்து A-ன் வெகு அருகில் வரை நேர்க்கோடு; A ஆனது நேர்க்கோட்டில் இல்லை.)

$1\leqq x<2$, $[x]=1$ $\therefore$ இவ்விடைவெளியில் வரைபடம் $y=x-1$ என்ற நேர்க்கோடு BC (C-ஐத் தவிர). $x=2$ என்றால், வரைபடம் D-க்குக் குதிக்கிறது. புள்ளிக் கோடு (dotted line) ஆனது வரைபடத்தில் சேராது.

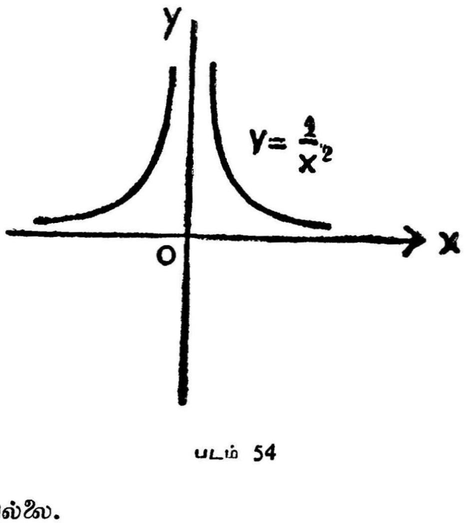
x ஆனது 1-ஐ விடச் சிறிய மதிப்புகள் மூலம், 1-ஐ நெருங்க, $f(x)$ ஆனது நேர்க்கோடு OA-ன் வழியே A-ஐ நெருங்குகிறது. அதாவது $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

x ஆனது 1-ஐ விடப் பெரிய மதிப்புகள் மூலம், 1-ஐ நெருங்க, $f(x)$ ஆனது நேர்க்கோடு CB-ன் வழியே B-ஐ நெருங்குகிறது. அதாவது $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

$\because \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, $\therefore$ $x = 1$ ஆனது முதல் ரக, அதாவது தாண்டும் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும்.

x ஆனது எந்த முழு வெண்ணானாலும், அது தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும். x-ன் வேறெந்த மதிப்புக்கும், f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளது.

(14) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.



படம் 54

$f(0)$ இல்லை.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(0+h)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(0-h)^2} = \infty$$

f-க்கு $x=0$ என்ற புள்ளி முடிவில்லாத தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும்.

$f(0)=\infty$ என்ருல், f ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது என்போம்.

(15) $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ என்ருல் $x=0$ ஆனது f-க்கு அலையும் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி எனக் காண்பிக்க.

சென்ற அத்தியாயத்தில், $\overline{f(+0)} = \infty$, $\underline{f(+0)} = -\infty$, $\overline{f(-0)} = \infty$, $\underline{f(-0)} = -\infty$ என்று காண்பித்தோம்.

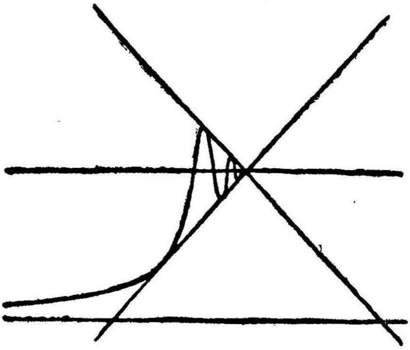
$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ இல்லை.

$x=0$ இடத்து முடிவில்லாமல் f அலைகிறது. $\therefore$ $x=0$ என்பது முடிவில்லாமல் அலையும் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளியாகும்.

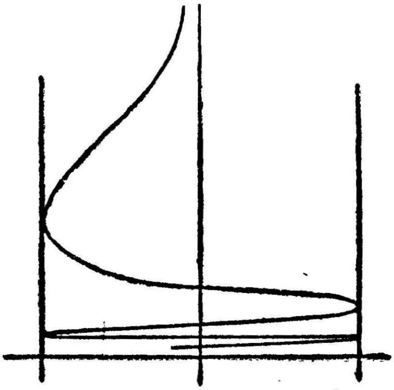
16. $f(x)=x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$=0$, $x=0$ f-ன் வரையறை அரங்கம் $[0, 1]$ என்க என்ருல் $x=0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

$\epsilon > 0$, $\delta = \epsilon$ என்க.



படம் 55(a)



படம் 55(b)

x ஆனது $[0, 1]$-ல் இருந்து, $|x-0|<\delta$ என்றால், $x\neq 0$ என்றால் $|f(x)-f(0)| = |x \sin \frac{1}{x} - 0| \leq |x| \cdot 1$

$$\because \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$< \delta = \varepsilon > 0.$$

$x=0$ என்றால், $|f(x)-f(0)| = 0 < \varepsilon$.

$\therefore$ f ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

17. $f(x)=\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$ $x\neq 0$ என்றால், f ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென நிறுவுக.

சென்ற அத்தியாயத்தில் $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ எனக் கண்டோம். $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. இது முதல் ரக, அதாவது, சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மைக்கு ஒரு உதாரணம்.

(18) $f(x)=x \sin \frac{1}{x}$, $x\neq 0$

$= 2$, $\quad x=0$ என்க.

முன்போல் $f(+0)=0=f(-0)$.

ஆனால் $f(0)=2$

$\therefore$ $x=0$ என்பது நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி. ஏனெனில், $f(0)=0$ என்று வரையறுத்தால், f ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சி ஆகும்.

(19) $$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ &= 1, & x=0 \end{aligned}\right\} \text{ என்க.}$$

சென்ற அத்தியாயத்தில் $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ என்று நிறுவினோம்.

$$= f(0)$$

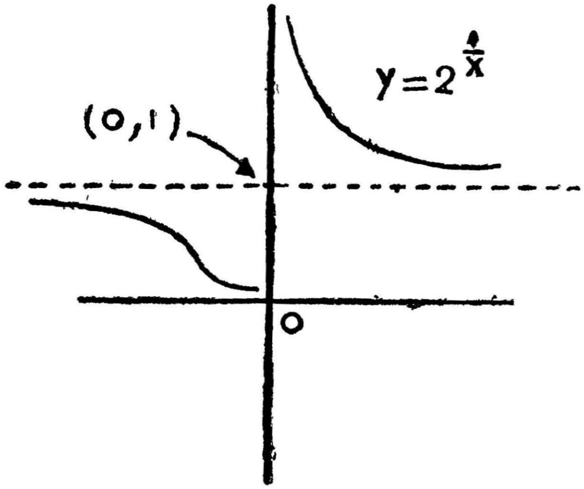
$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$\therefore$ $x=0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

(20) $\left.\begin{array}{ll} f(x) = 2^{1/x}, & x \neq 0 \\ \quad = 1, & x = 0 \end{array}\right\}$ என்றால் $x=0$ இடத்து, f-ன் தொடர்ச்சியைப்பற்றி நமக்கென்ன தெரியும்?

சென்ற அத்தியாயத்தில் $f(+0)=\infty$, $f(-0)=0$.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ இல்லை. $\therefore$ $x=0$ என்பது முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும்.



படம் 56

(21) $$\begin{aligned} f(x) &= 0, & x&=0 \\ &= \tfrac{1}{2} - x, & 0&<x<\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}, & x&=\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{3}{2} - x, & \tfrac{1}{2}&<x<1 \\ &= 1, & x&=1 \end{aligned}$$

என்றால் $x=0$, $\frac{1}{2}$, 1 என்ற புள்ளிகளிடை f-ன் தொடர்ச்சியை ஆராய்க.

(i) **x = 0**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{2} - h \quad (0<x<\tfrac{1}{2})$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

$\therefore f(+0) = \frac{1}{2}$ இதேபோல், $f(-0) = \frac{1}{2}$ $\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

ஆனால் $f(0)=0$ $\quad \therefore f(-0) = f(+0) \neq f(0)$

$\therefore x=0$ ஆனது நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி.

(ii) **x = ½**

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} [\tfrac{3}{2} - (\tfrac{1}{2}+h)] = 1 \ (\tfrac{1}{2}<x<1)$$

இதுபோல் $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = 0.$ $\quad \therefore f(\frac{1}{2}+0) \neq f(\frac{1}{2}-0)$

இது சாதாரண தொடர்ச்சியின்மைக்கு உதாரணம்.

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$ என்ற புள்ளியிடை f ஆனது தொடர்ச்சியற்றது.

குறிப்பு

இங்கே, $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - h)$

$(x<\frac{1}{2})$

$\therefore \quad f(\frac{1}{2}-0) = 0.$

(iii) **x = 1**

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} \tfrac{3}{2} - (1-h) \quad (x<1)$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

ஆனால் $f(1) = 1$

$f(1) \neq f(1-0)$

$\therefore$ $x=1$ இடத்து f ஆனது தொடரற்றது.

(22) எல்லா மெய்யெண்கள் x-க்கும், $f(x) =$ மாறிலி c என்றால், f ஆனது மெய் நேர்க்கோட்டின் முழுமையிலும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதெனக் காண்பிக்க.

$\epsilon>0$ என்றும் a என்பது யாதாமொரு மெய்யெண் என்றும் கொள்க. x என்பது யாதாமொரு மெய்யெண் என்றால், $\delta>0$ என்றால் $0<|x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|=|c-c|=0<\epsilon$.

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x)=f(a)=c.$$

$f(x)$ ஆனது எல்லாப் புள்ளிகளிடத்தும் தொடர்ச்சியாய் யுள்ளது.

(23) எல்லா மெய்யெண்கள் x-க்கும், $f(x)=x$ என்க. எல்லாப் புள்ளிகளிடத்தும் f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. எங்ஙனம்? a என்பது யாதாமொரு மெய்யெண் என்றும், $\epsilon>0$ என்றும் கொள்க. $\delta=\epsilon$ என்க.

$$\therefore\ 0<|x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|=|x-a|<\delta=\epsilon$$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. $\therefore f$ ஆனது a என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$\therefore f$ ஆனது எல்லாப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

(24) $f(x)=\log x,\ \forall x>0$ என்றால் f ஆனது தொடர்ச்சி யுள்ள சார்பு எனக் காண்பிக்க.

$a>0$ என்றால், $\log x=\log a+\log \dfrac{x}{a}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{a}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\log x=\log a+\log 1=\log a$$

$\therefore f$ ஆனது $0<x<\infty$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

(25) $f(x)=\tan^{-1}x,\ \forall x$ என்றால் f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு என நிறுவுக.

$$\tan^{-1}x=\tan^{-1}a+\tan^{-1}\frac{x-a}{1+ax},\quad (-xa<1)$$

ஆனால் $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x-a}{1+xa}=0$

$$\therefore \lim_{x\to a} \tan^{-1}x = \lim_{x\to a} \tan^{-1}a + \lim_{x\to a} \tan^{-1} \frac{x-a}{1+ax}$$

$$= \tan^{-1}a + \tan^{-1} \lim_{x\to a} \frac{x-a}{1+ax}$$

$$= \tan^{-1}a$$

$\therefore f \equiv \tan^{-1}$ ஆனது எங்கும் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

(26) $f(x)=\sin^2 x, \ \forall x$ என்றால் f-ன் தொடர்ச்சியைப் பற்றி ஆராய்க. $\epsilon>0$ என்றும் a என்பது x-ன் ஒரு மதிப்பு என்றும் கொள்க. $|x-a|<\epsilon$ என்க.

$$|f(x)-f(a)| = |\sin^2 x - \sin^2 a| = |\sin(x+a)| \ |\sin(x-a)|$$

$$\leqq |\sin(x-a)| \leqq |x-a| < \epsilon.$$

$\therefore f$ ஆனது எங்கும் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

6·4. தொடர்ச்சிச் சார்புகளின் பண்புகள் (Properties of Continuous Functions)

தேற்றம் 1

f, g சார்புகளின் பொது வரையறை அரங்கம் I என்க. c என்பது I-ல் ஒரு புள்ளி என்றும், c இடத்து f, g இரண்டும் தொடர்ச்சியாயுள்ளன என்றும் கொள்க. k என்பது ஒரு மெய் யெண் என்க. அப்படியானால், $f+g, f-g, fg, kf$ என்ற சார்பு களும் c இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளன என்றும் I-ன் மீது $\frac{f}{g}$ வரையறுக்கப்பட்டால், $(g\neq 0)$ $\frac{f}{g}$-ம் c இடத்துத் தொடர்ச்சி யுடையது என்றும் நிறுவுக.

நிறுவல்

(i) $f+g$ ஆனது c இடத்துத் தொடர்ச்சியுடையது என்று நிறுவ, $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = (f+g)(c)$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

f ஆனது c இடத்துத் தொடர்ச்சியுடையதாய் இருப்பதால், $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ அதுபோல், $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$.

சென்ற அத்தியாயத்தில் கண்டவாறு,

$$\lim_{x\to c} (f+g)(x) = f(c)+g(c) = (f+g)(c)$$

$\therefore$ $f+g$ ஆனது c இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

சென்ற அத்தியாயத்தின் எல்லைகளின் பண்புகளைப் பயன் படுத்தி, $f-g, fg, kf$ ஆகியவை c இடத்துத் தொடர்ச்சியுடையன என நிறுவலாம்.

தேற்றம் 2

எல்லா பல்லுறுப்புகள் $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ ...\ +a_nx^n$, $\forall x$ (மெய்யெண்) என்க. F ஆனது மெய் நேர்க்கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்தும் தொடர்ச்சியாயுள்ளதென நிறுவுக.

6·3, கணக்குள் (22), (23)-ன்படி, $f(x)=a_0$, $g(x)=x, \forall x$ என்றால் f-ம், g-ம் மெய் நேர்க்கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத் துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளன.

6·4, தேற்றம் (1)-ன்படி, $(f\cdot g)(x)=a_0x\to$ மெய் நேர்க்கோட்டில் $f\cdot g$ ஆனது தொடர்ச்சிச் சார்பு ஆகும்.

இரு தொடர்ச்சிச் சார்புகளின் கூட்டுத் தொகையும் ஒரு தொடர்ச்சிச் சார்புதான் என்பதைச் சொல்லும் 6·4 தேற்றம் 1-ஆல், $h(x)=a_0+a_1x$ என்றவாறு உள்ள சார்பு h-ம் தொடர்ச்சியுடையதே. 6·4 தேற்றம் 1-ஐத் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்த $F(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+\ ...\ +a_nx^n$ என்றவாறு உள்ள F ஆனது மெய் நேர்க்கோட்டில் தொடர்ச்சியாய் இருக்கிறது என்று தெரிகிறது.

கிளைத் தேற்றம்

$b_0+b_1x+\ ...\ +b_nx^n$ என்ற பல்லுறுப்பை 0 ஆக்கும் x-ன் மதிப்புகளைத் தவிர மற்றெல்லா மெய்யெண்கள் x-க்கும்,

$$F(x)=\frac{a_0+a_1x+\ ...\ +a_mx^m}{b_0+b_1x+\ ...\ +b_nx^n},$$

என்றவாறு உள்ள விகிதமுறு சார்புகள் F அனைத்தும் வரையறை அரங்கத்தின் x-களிடத்துத் தொடர்ச்சியுடையன என நிறுவுக.

நிறுவல்

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\quad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$ என்பது சென்ற அத்தியாயத்தில் கண்டோம். $x=a$ இடத்து, f-ம், g-ம் தொடர்ச்சி யுடையன என்றால், $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$

$$\therefore \lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad g(a)\neq 0$$

$$= \left(\frac{f}{g}\right)(a)$$

$\therefore \frac{f}{g}$ ஆனது $x=a$ இடத்துத் தொடர்ச்சியுடையது.

$f(x)=a_0+a_1x+\ ...\ +a_m x^m,$

$g(x)=b_0+b_1x+\ ...\ +b_n x^n$

என்றால் f-ம், g-ம் எல்லா x இடத்துத் தொடர்ச்சியுடையன என்று 6·4 தேற்றம் 2-ல் கண்டோம்.

$\therefore \frac{f}{g}$-ம், அதாவது F-ம், ($g(x)=0$-ன் மூலங்களைத் தவிர) தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

தேற்றம் 3

தொடர்ச்சிச் சார்புகளின் சேர்க்கை அல்லது தொகுப்பு (Composition of Continuous Functions) : f என்பது இடைவெளி I_1-ன் மீதும், g என்பது இடைவெளி I_2-ன் மீதும் வரையறுக்கப்படட்டும். f-ன் வீச்செல்லை I_2-ல் அடங்கியிருக்கட்டும். f ஆனது I-ன் a என்ற புள்ளியிடத்தும், g ஆனது $f(a)$ இடத்தும் தொடர்ச்சியாய் இருக்கட்டும். I_1-ஐ வரையறை அரங்கமாகக் கொண்ட ஒரு சார்பு h என்றால், I_1-ன் ஒரு புள்ளி x இடத்து h-ன் மதிப்பு $h(x)=g[f(x)]$ என்க. அப்படியானால் h ஆனது a இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது என்று நிறுவுக.

சார்பு h ஆனது சார்புகள் f, g-க்களின் சேர்க்கை எனப்படும். (இந்தத் தேற்றத்தையே சுமாராக (roughly), "தொடர்ச்சியுள்ள சாா பின் தொடர்ச்சியான சார்பு ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகும்" என்று சொல்லுவது வழக்கம்.)

நிறுவல்

$\varepsilon>0$ என்க

g ஆனது $f(a)$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது என்பதால், $y\in I_2$, $|y-f(a)|<\delta_1 \rightarrow |g(y)-g[f(a)]|<\varepsilon$ என்றவாறு $\delta_1>0$

இருக்கிறது. a இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால், $x \in I_1$, $|x-a| < \delta_2 \rightarrow |f(x)-f(a)| < \delta_1$ என்றவாறு $\delta_2 > 0$ இருக்கிறது.

$\delta_1 = \delta_2$ என்க (இதுதான் முக்கியமான கட்டம்).

அப்போது $x \in I_2$, $|x-a| < \delta_2 \rightarrow |f(x)-f(a)| < \delta_1$

$\therefore |g[f(x)]-g[f(a)]| = |h(x)-h(a)| < \epsilon$

$\therefore h$ ஆனது a இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

குறிப்பு

h ஆனது g, f களின் சேர்க்கை யாதலால், இரு தொடர்ச்சியுள்ள சார்புகளின் சேர்க்கையும் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பே என நிறுவினோம்.

நல்லதொரு உதாரணம்

$f(x) = \log x$, $0 < x < \infty$; $g(x) = \tan^{-1} x$ என்றால் f-ம் g-ம் தொடர்ச்சியுள்ள சார்புகள் என 6·3 (24), (25) கணக்குகளில் கண்டோம். இந்தத் தேற்றத்தினால்,

$h(x) = \log \tan^{-1} x$, $x > 0$ என்றவாறு உள்ள h சார்பு ஆனது தொடர்ச்சியுடையது.

தேற்றம் 4

f-ன் வரையறை அரங்கம் $I \equiv [a,b]$ என்றும், I-ன் யாதாமொரு புள்ளி c இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்றும், $f(c) \neq 0$ என்றும், $\delta > 0$, $0 \leq |x-c| < \delta$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $f(c)$-ன் குறியே $f(x)$-ன் குறியாம் என்றவாறு $(c-\delta, c+\delta)$ என்ற திறந்த இடைவெளியொன்று இருக்கிறது.

நிறுவல்

f ஆனது, $x = c$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளதால், $\epsilon > 0, x \in I, \delta > 0, 0 \leq |x-c| < \delta \rightarrow |f(x)-f(c)| < \epsilon$ என்றவாறு $\delta > 0$ இருக்கிறது.

I . . . அதாவது, $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$, $\forall x \in c - \delta < x < \varepsilon + \delta$-க்கு

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் இரண்டு

$f(c) > 0$, $f(c) < 0$.

(i) இப்போது $f(c) > 0$ என்க. $\epsilon > 0$ என்பது யாதாமொரு எண் என்பதால், $\varepsilon < f(c)$ என்க. அதாவது $f(c) - \epsilon > 0$ என்க.

(I)-லிருந்து $f(c)-\varepsilon<f(x)$, $\forall x \in c-\delta<x<c+\delta$. இப்போது $0<f(c)-\varepsilon$ என்பதால், $0<(x)$ $\therefore f(x)>0$.

$\therefore$ $f(x)$-ன் குறியும் $f(c)$-ன் குறியும் ஒன்றுதானே !

(ii) $f(c)<0$ என்க. $\therefore \varepsilon<|f(c)|$ என்றவாறு ε-ஐ எடுத்துக் கொள்க. அதாவது $\varepsilon<-(c)$, அதாவது, $f(c)+\epsilon<0$.

(I)-லிருந்து, $f(x)<f(c)+\epsilon$. இப்போது, $f(c)+e<0$ என்பதால் $f(x)<0$. $\therefore$ $f(x)$-ன் குறியும் $f(c)$-ன் குறியும் ஒன்றல்லவோ !

கிளைத் தேற்றங்கள்

(2) f-ன் வரையறை அரங்கம் $[a, b]$ என்றும், f ஆனது இடது முனைப் புள்ளி $x=a$ இடத்துத் தொடர்ச்சியுள்ளது என்றும், $f(a)\neq 0$ என்றும் கொண்டால், $\delta>0$, $(a+\delta)$-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும், $f(a)$-ன் குறியே $f(x)$-ன் குறியாம் என்றபடி $(a, a+\delta)$ என்ற திறந்த இடைவெளியொன்று இருக்கிறது.

நிறுவல்

இதனை மேற்கண்ட தேற்றத்தைப் போலவே நிறுவலாம்.

(2) f-ன் வரையறை அரங்கம் $[a, b]$ என்றும், f ஆனது வலது முனைப் புள்ளி $x=b$ இடத்துத் தொடர்ச்சியுள்ளது என்றும், $f(b)\neq 0$ என்றும் கொண்டால், $\delta>0$, $(b-\delta, b)$ என்ற ஒரு திறந்த இடைவெளியானது, இவ்விடைவெளியின், அதாவது $(b-\delta, b)$-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும், $f(b)$-ன் குறியே $f(x)$-ன் குறியாம், என்றபடி இருக்கிறது.

(3) f-ன் வரையறை அரங்கம் $[a, b]$ என்றும், f ஆனது $[a, b]$-ன் யாதாமொரு புள்ளி $x=c$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்றும், ஒவ்வொரு $\delta>0$-க்கும் $|x-c|<\delta$-ல் $f(x)=0$ என்றபடி ஒருபுள்ளி இருக்கிறது என்றும் கொண்டால், $f(c)=0$ ஆகும்.

நிறுவல்

$x=c$ இடத்து, f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ள தென்பதால், $\varepsilon>0, \delta>0, |x-c|<\delta \rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$. கிளைத் தேற்றத்தில் கொடுத்தபடி, $|x-c|<\delta$-ன் ஒரு புள்ளி x' இடத்து, $f(x')=0$.

$\therefore |f(x')-f(c)|<\varepsilon$ என்பது $|0-f(c)|<\varepsilon$

அதாவது $|f(c)| < \varepsilon$ என்றாகும்.

ε என்பது யாதாமொரு (சிறிய) எண் என்பதால், $f(c)=0$.

(4) f-ன் வரையறை அரங்கம் $[a, b]$ என்றும், $x=a$ இடத்து, f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது என்றும், $f(a)=c>0$ என்றும் கொண்டால், $0<k<1$ என்றால், $|x-a|<\delta$-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும் $f(x)>kc$ என்றவாறு $\delta>0$ இருக்கிறது.

நிறுவல்

$x=a$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால், $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $0 \leqq |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

அதாவது, $f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$, $0 \leqq |x-a| < \delta$
$c>0$ என்பதாலும், $0<k<1$ என்பதாலும்,

$\varepsilon=(1-k)c$ என்று ε-ஐத் தேர்ந்தெடுப்பதில் தவறில்லை.

$\therefore f(a)-\varepsilon < f(x)$ என்றால், $c-(1-k)c < f(x)$, $0 \leqq |x-a| < \delta$

அதாவது $kc < f(x)$, $0 \leqq |x-a| < \delta$.

அதாவது $f(x) > kc$, $0 \leqq |x-a| < \delta$.

தேற்றம் 5

$a \leqq x \leqq b$-ல் f ஆனது தொடர்ச்சியான சார்பு என்றும், $f(a)$-ம் $f(b)$-ம் எதிர்க் குறிகளையுடையன என்றும் கொண்டால், $f(\xi)=0$ என்றவாறு, குறைந்த பட்சம் ஒரு புள்ளி ξ-யாவது (a, b)-ல் இருக்கிறது.

நிறுவல்

குறிப்பாக, $f(a)<0$, $f(b)>0$ என்க.

c என்பது $[a, b]$-ன் மையப் புள்ளி என்க.

$[a, b]$-ஐ $[a, c]$, $[c, b]$ என்ற இரு சம இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும்.

செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள் மூன்று

(i) $f(c)=0$, (ii) $f(c)>0$ (iii) $f(c)<0$

நிகழ்ச்சி (i) $f(c)=0$ என்றால் தேற்றம் உண்மையாகி விடுகிறது.

நிகழ்ச்சி (ii) $f(c)>0$ என்க.

$[a, c]$-ஐ எடுத்துக் கொள்க.

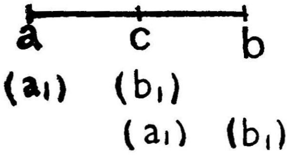
இங்கே, $f(a)<0, \quad f(c)>0$.

நிகழ்ச்சி (iii) $f(c)<0$ என்க.

$[c, b]$-ஐ எடுத்துக் கொள்க.

இங்கே, $f(b)>0, \quad f(c)<0$.

ஆகையால், நிகழ்ச்சிகள் (ii) (iii)களுக்கு, எதுவாயினும், இடது முனையில் $f(x)<0$ என்றவாறும், வலது முனையில் $f(x)>0$ என்றவாறும் உள்ள ஒரு இடைவெளியை எப்போதும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். இந்த உள்வெளியை $[a_1, b_1]$ என்றால், $f(a_1)<0$, $(b_1)<0$.



படம் 57

மேலும், $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$

இப்போது $[a_1, b_1]$-ஐ இரு(பகுதி) உள் இடைவெளிகளாக, $[a_1, b_1]$-ன் மையப் புள்ளியினால், பிரிக்க. முன் போல் இவ்விரு இடைவெளிகளில் $[a_2, b_2]$ என்பது, $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$ என்றிருக்கட்டும்.

மேலும், $b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2^a}(b-a)$

இப்படியே இச்செய்கையை நீடித்தால்,

$f(a_n)<0, \quad f(b_n)>0, \quad b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$ என்றவாறு

$\{[a_n, b_n]\}_{n=1, 2, \ldots}$ என்ற மூடிய இடைவெளிகளின் ஒழுங்கு வரிசை கிடைக்கிறது.

இவ்வாறாக, நமக்கு உள்ளுக்குள் உள்ளாகப் பின்னிய இடைவெளிகள் கூடு கிடைக்கிறது.

மேலும் $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0.$

$\therefore$ இடைவெளிக்கூடு தேற்றத்தின்படி, எல்லா இடைவெளிகளுக்கும் பொதுவான ஒருபுள்ளி ξ ஆனது

$\lim_{n\to\infty} a_n=\xi=\lim_{n\to\infty} b_n$ என்றவாறு இருக்கிறது.

ξ ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரு புள்ளியாதலாலும், f ஆனது $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சிச் சார்பு ஆதலாலும், f ஆனது ξ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. $\therefore$ "ஹைனெ"யின் வரை இலக்கணப்படி,

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

ஆனால் $f(a_n)<0,\ f(b_n)>0,\ n=1, 2, 3, \ldots$

$$(2)\quad \therefore \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqq 0, \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqq 0$$

$\therefore$ (1), (2)-லிருந்து $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0 = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$

$$\therefore f(\xi) = 0$$

$\because f(a)>0, f(b)>0, \quad \therefore \xi \neq a, \xi \neq b$

$\therefore f(\xi)=0,\ a<\xi<b.$

தேற்றம் 6

இடை மதிப்புத் தேற்றம் (Intermediate value theorem): $I=[a, b]$-ன் மீது f ஆனது தொடர்ச்சிச் சார்பு என்க. $f(a) \leqq y_0 \leqq f(b)$ என்றும் கொள்க. $a \leqq x_0 \leqq b$ என்றவாறும், $f(x_0)=y_0$ என்றவாறும் ஒரு புள்ளி x_0 இருக்கிறது.

நிறுவல்

$\varphi(x) = f(x) - y_0$ என்க.

c என்பது $[a, b]$-ன் ஒரு புள்ளி என்க.

$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, $\because f$ ஆனது I-ல் தொடர்ச்சிச் சார்பு.

$$\lim_{x\to c} \varphi(x) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} y_0,\quad a \leqq c \leqq b$$

$$= f(c) - y_0$$

$$= \varphi(c)$$

$\therefore \varphi$ ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு.

இப்போது, $\varphi(a) = f(a) - y_0 \leqq 0 \quad \because f(a) \leqq y_0$

$\varphi(b) = f(b) - y_0 \geqq 0 \quad \because f(b) \geqq y_0.$

$\therefore \varphi$ ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு; $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ என்பவை எதிர்க் குறிகளை உடையன. $\therefore$ தேற்றம் 5-ன் படி, $\varphi(x_0) = 0$, $a \leqq x_0 \leqq b$ என்றவாறு ஒரு புள்ளி x_0 இருக்கிறது.

அதாவது, $f(x_0) - y_0 = 0$, $a \leqq x_0 \leqq b$

அதாவது, $f(x_0) = y_0$, $a \leqq x_0 \leqq b$.

தேற்றம் 7

$[a, b]$-ல் f ஆனது தொடர்ச்சியான சார்பு என்க. $\epsilon > 0$ என்க. $[a, b]$-ஐ முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உள்ளுக்குள் உள்ளான இடைவெளிகளாக, இவ்விடைவெளிகளுள் யாதானுமொன்றில் x', x'' என்ற ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகளுக்கு, $| f(x') - f(x'') | < \epsilon$ என்றவாறு, பிரிக்கமுடியும்.

நிறுவல்

தேற்றம் உண்மையல்ல என்று வைத்துக்கொள்க. அதாவது, தேற்றத்தின் நிபந்தனையை உறுதிப்படுத்துமாறு, $[a, b]$-ஐ முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உள் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்க முடியாது என்க.

$[a, b]$-ன் மையப்புள்ளி c என்றால், $[a, b]$-ஐ, $[a, c]$, $[c, b]$ என்ற இரு சம உள் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும். அப்படியென்றால் $[a, c]$-யிலோ, அல்லது $[c, b]$-யிலோ தேற்றம் உண்மையாகாது; அல்லது, இரு உள் இடைவெளிகளிலுமே தேற்றம் உண்மையாகாமலும் இருக்கலாம். ஏதாவதொரு உள் இடைவெளியை $[a_1, b_1]$ என்க.

அப்போது, $[a_1, b_1] \subset [a,b]$; $[a_1, b_1]$ன் நீளம் $= \frac{1}{2}(b-a)$ இப்போது $[a_1, b_1]$-ஐ முன்போல், $[a_1, b_1]$-ன் மையப்புள்ளி வழி இரு சம உள்வெளிகளாகப் பிரிக்க. இவ்விரு உள்வெளிகளில் யாதானுமொன்றில் தேற்றம் உண்மையில்லை. இதனை $[a_2, b_2]$ என்க.

அப்போது, $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$; $[a_2, b_2]$ன் நீளம் $= \frac{1}{2}[b_1 - a_1]$

$$= \frac{1}{2^2}(b-a).$$

இச்செய்கையை நீடித்தால் தேற்றம் உண்மையாகாத இடைவெளி $[a_n, b_n]$-ஐ அடைவோம்.

அப்போது, $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$; $[a_n, b_n]$-ன் நீளம்

$$= \frac{1}{2^n}(b-a)$$

இவ்வாருக, $\{[a_n, b_n]\}_{n=1, 2, 3, \ldots}$ என்ற மூடிய இடைவெளி களின் ஒழுங்கு வரிசை கிடைக்கப் பெறுகின்றோம். இவ்விடைவெளி கள் ஒன்றுக்குள் ஒன்று பின்னி இருக்கிறது என்பதுடன்,

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ என்பதுடன், இவ்விடை வெளிகளுள் ஒன்றிலாவது தேற்றம் உண்மையாகாது.

இடைவெளிக்கூடு தேற்றத்தின்படி, $[a_n, b_n]_{n=1, 2, \ldots}$ இடை வெளிகளுக்குப் பொதுவான ஒருபுள்ளி ξ ஆனது $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ $= \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ என்றவாறு உள்ளது.

f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதாலும், $x=\xi$ என் பது $[a, b]$-ன் ஒரு புள்ளியாதலாலும், f ஆனது $x=\xi$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$\therefore x', x'' \in (\xi-\delta, \xi+\delta),\ \delta > 0 \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon > 0$$

என்றவாறு $(\xi-\delta, \xi+\delta)$-ஐத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். எப்படி யெனில், $|f(x')-f(x'')| \leqq |f(x')-f(\xi)| + |f(\xi)-f(x'')-$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ என்பதால், $b_n - a_n < \frac{\delta}{2}$ என்றவாறு n-ஐப் போதிய அளவு பெரியதாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

ξ ஆனது $[a_n, b_n]$-ல் உள்ளதாலும், $[a_n, b_n]$-ன் நீளம் $\frac{\delta}{2}$-ஐ விடச் சிறியதாதலாலும், $[a_n, b_n]$ ஆனது $(\xi-\delta, \xi+\delta)$-னுள் இருக்கிறது.

x', x'' என்பவை $(\xi-\delta, \xi+\delta)$-ன் யாதாமொரு புள்ளிகள் என்பதால், இப்புள்ளிகளை $[a_n, b_n]$-க்குள்ளும் இருக்குமாறு எடுத் துக் கொள்ளலாம். அப்போதும், $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$, $x', x'' \in [a_n, b_n]$ அதாவது $[a_n, b_n]$-ல் தேற்றம் உண்மை என்பது பொருள். இது தொடக்கத்தில் நாம் எடுத்துக் கொண்ட தற்

படம் 58

கோளுக்கு எதிர் மறுப்பு ஆகும். ஏனெனில், தேற்றமானது ஒவ்வொரு, எல்லா இடைவெளிகளிலும் உண்மை ஆகாது என்பதன்றோ தற்கோள்?

ஆகையால் நம் தற்கோளில் குற்றம் குற்றமே. தேற்றம் உண்மை.

தேற்றம் 8

ஒரு மூடிய இடைவெளியிலே தொடர்ச்சியாய் இருக்கும் சார்பு ஆனது அவ் விடைவெளியிலே வரம்புடையதாய் இருக்கும்.

நிறுவல்

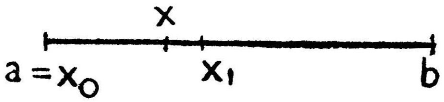
இதனைத் தேற்றம் 7-ன் கிளைத் தேற்றமாக நிறுவலாம்.

f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சிச் சார்பு என்க.

மேற்கண்ட தேற்றம் 7-ன் நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட்ட உள் இடை வெளிகளாக $[a, b]$-ஐப் பிரிக்கவும். பிரிக்கும் புள்ளிகள், $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$ என்க.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x)+f(a)-f(a)| \\ &= |f(a)+\{f(x)-f(a)\}| \\ &\leqq |f(a)|+|f(x)-f(a)| \\ &< |f(a)|+\varepsilon, \quad 0<(x-a)\leqq(x_1-a) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad |f(x_1)| f< | \, (a)+\varepsilon$$



படம் 59

இதேபோல்,

$$|f(x)| \leqq |f(x_1)| + |f(x)-f(x_1)|$$
$$< |f(x_1)| + \varepsilon, \ 0<(x-x_1) \leqq (x_2-x_1)$$
$$<(|f(a)| + \varepsilon) + \varepsilon = |f(a)| + 2\varepsilon, \ 0<(x-x_1) \leqq (x_2-x_1)$$

$$\therefore \ |f(x_2)| < |f(a)| + 2\varepsilon$$

இதேபோல் அடுத்தடுத்த உள் இடைவெளிக்கு மேற்கண்ட செய்கையை நீடித்தால், n-ஆவது உள் இடைவெளிக்கு,

$|f(x)| < |f(a)| + n\varepsilon, \quad 0<(x-x_{n-1}) \leqq (b-x_{n-1})$ என்பது உண்மையாகும்.

$\therefore$ முழு இடைவெளி $[a, b]$-ல்,

$$|f(x)| < |f(a)| + n\varepsilon$$

$\therefore$ f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ளது.

மிக மிக முக்கியமான குறிப்பு

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $0<x\leqq 1$ என்றால் f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளது; ஆனால் வரம்பற்றது. எப்படியெனில், α என்பது $0<x\leqq 1$-ன் யாதாமொரு புள்ளியெனில்

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{1}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\alpha+h} = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha\neq 0)$$

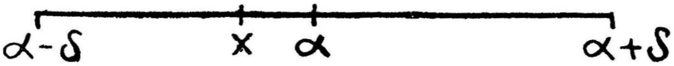
$$\lim_{x\to\alpha^-} \frac{1}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\alpha-h} = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha\neq 0)$$

$f(\alpha+0) = f(\alpha-0)$ என்பதால் f ஆனது $0<x\leqq 1$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

(அல்லது) $\delta>0$, $|x-\alpha| < \delta$

$$\to |f(x)-f(\alpha)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha}\right| \frac{|x-\alpha|}{|x|\,|\alpha|}$$

$$\to |f(x)-f(\alpha) < \frac{\delta}{|x|\,|\alpha|} = \frac{\delta}{x\alpha} \quad \because x>0$$



படம் 60

$\because \quad x \in (\alpha-\delta, a+\delta), \quad \therefore\ \alpha-\delta \geqq \frac{1}{2}\alpha$

அதாவது $x > \alpha - \delta \geqq \frac{1}{2}\alpha$

$\therefore \quad |f(x) - f(\alpha)| < \frac{\delta}{\frac{1}{2}\alpha^4} = \varepsilon$ (δ-ஐ $\frac{1}{2}\alpha^2\varepsilon$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்)

$\therefore$ f ஆனது $0 < x \leqq 1$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

ஆனால், f-ன் g.l.b. = 1; 0-ன் அண்மையில் ஒவ்வொரு நேர் x-க்கும் $f(x) = \frac{1}{x}$ ஆனது மிக மிகப் பெரியதான எண்ணாக இருக்கிறது.

$\therefore$ f ஆனது $0 < x \leqq 1$-ல் வரம்பற்றது.

இந்த உதாரணத்தால் தெளிவுரும் உண்மை : "f ஆனது (a, b)-ல் (திறந்த இடைவெளியில்) தொடர்ச்சியாய் இருந்தால், அது அவ்விடைவெளியில் கட்டாயமாக வரம்புள்ளதாக இருக்க வேண்டுவதில்லை.

வரை இலக்கணம்

சார்பின் மீப்பெரிய மதிப்பு (Maximum), மீச்சிறிய மதிப்பு (Minimum): f-ன் வரையறை அரங்கம் இடைவெளி I என்க.

I-ன் எல்லா x-க்கும், $f(x_0) \geqq f(x)$ என்றவாறு I-ல் இருக்கும் புள்ளி x_0-ஐ f-ன் மீது மீப்பெரிய புள்ளி என்றும், I-ன் எல்லா x-க்கும், $f(y_0) \leqq f(x)$ என்றவாறு I-ல் இருக்கும் புள்ளி y_0-ஐ f-ன் மீச்சிறிய புள்ளி என்றும் சொல்லுவார்கள்.

f-க்கு மீப்பெரிய புள்ளி இருந்தால், f ஆனது I-ல் தனது மீப்பெரிய மதிப்பை அடைகிறது என்றும், அதேபோல், f-க்கு மீச்சிறிய புள்ளி இருந்தால் f ஆனது I-ல் தனது மீச்சிறிய மதிப்பை அடைகிறது என்றும் சொல்லுவார்கள்.

ஒரு I இடைவெளியில் f-ஐ வரையறுத்த மாத்திரத்தில் f-க்கு மீப்பெருமம்(maximum)மோ, மீச்சிறுமம்(minimum)மோ இருக்க

வேண்டுவதில்லை; f ஆனது I-ல் தொடர்ச்சியாயிருந்தாலும் அவ் விதக் கட்டாயமில்லை.

உதாரணமாக $f(x)=\dfrac{1}{x}$. $0<x<1$ என்க.

f ஆனது $(0, 1)$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ளது என்று நாம் சற்று முன்புதான் படித்தோம்.

$(0, 1)$-ல் யாதாமொரு x_0-க்கு $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{x_0}{2}\right)}=\dfrac{2}{x_0}>\dfrac{1}{x_0}=f(x_0)$

$$\therefore\ f\left(\frac{x_0}{3}\right)>f(x_0)$$

இப்படியே, $f\left(\dfrac{x_0}{3}\right)>f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)>f(x_0)\ldots\ldots$

$\therefore$ f-க்கு மீப்பெரு புள்ளி இல்லை.

இதேபோல் மற்றொரு உதாரணம்: $f(x)=x,\ \forall\ x\in(0, 1)$ என்றால் f ஆனது $(0, 1)$-ல் வரம்புள்ள, தொடர்ச்சியாயுள்ள சார்பு தான் என்றாலும் f தனது மீப்பெருமத்தையோ, மீச்சிறுமத்தையோ அடையவில்லையே!

f ஆனது மூடிய இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட வேண்டிய அவசியத்தைப் பார்ப்போம்.

தேற்றம் 9

f ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்றால், இவ்விடைவெளியில் (ஒரு தடவையாவது) தன்னுடைய மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளை அடைகிறது. இதனையே, "மூடிய இடைவெளியிலே தொடர்ச்சியாயுள்ள சார்பு, தன்னுடைய வரம்புகளை ஒரு தடவையாவது இவ்விடை வெளியில் அடைகிறது" என்பர்.

நிறுவல்

f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால், மேற்கண்ட தேற்றம் 8-ன் படி, f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ளது.

M, m இவை முறையே $f(x)$-ன் l.u.b., g.l.b. என்க.

அதாவது $M=\text{l.u.b.}\{f(x) \mid x\in[a, b]\}$, $m=\text{g.l.b.}\ \{f(x) \mid x\in [a, b]\}$

$[a, b]$-ல் குறைந்த பட்சம் இரு எண்கள் x_0, y_0 என்பவை $f(x_0)=M$, $f(y_0)=m$ என்றவாறு இருக்கின்றன எனக் காண்பித்தால் போதும்.

$[a, b]$-ன் எந்த x-க்கும், $f(x) \neq M$ என்க. அதாவது f ஆனது M-ஐ அடையவில்லை என்க. இது தற்கோள்.

$\therefore M-f(x)>0.$

$x \in [a,b], \varphi(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$ என்றவாறு உள்ள சார்பு φ-ஐ எடுத்துக் கொள்க.

$M-f(x) \neq 0$, f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

$\rightarrow \varphi$-ம் $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$\therefore \varphi$ ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ளது.

$\therefore [a, b]$-ல் φ-ன் l.u.b. ஆனது G என்க.

$\therefore \varphi(x) \leq G$

அதாவது, $\dfrac{1}{M-f(x)} \leq G.$

அதாவது, $M-f(x) \geq \dfrac{1}{G}$

அதாவது, $f(x) \leq M-\dfrac{1}{G}, \ \forall x \in [a, b]$

"M ஆனது $f(x)$-ன் l.u.b." என்பதன் எதிர் மறுப்பல்லவா இது ?

ஆதலால் நமது தற்கோள் குற்றம் குற்றமே.

$\therefore$ f ஆனது M-ஐ ஒரு தடவையாவது அடைந்தே தீர வேண்டும்.

இப்போது f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியானால், $-f$-ம் தொடர்ச்சிச் சார்புதான். $\therefore -f$ ஆனது தனது மீப்பெருமத்தை y என்ற புள்ளியிடத்து அடைகிறது. அதாவது, y என்ற புள்ளியிடத்து f ஆனது தனது மீச்சிறுமத்தை அடைகிறது.

தேற்றம் 10

f ஆனது $[a, b]$-ம் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது என்க. f-ன் மீப்பெருமம் M என்றும், மீச்சிறுமம் m என்றும் கொள்க. அப்படி

யானல் f-ன் வீச்செல்லையானது ஒரு புள்ளியோ அல்லது இடை வெளி $[m, M]$ ஆகும்.

நிறுவல்

f-ன் வீச்செல்லை ஒரு புள்ளியில் என்று வைத்துக் கொள்க. அப்போது $m<M$. $m=f(x_1)$, $M=f(x_2)$ என்றவாறு x_1, x_2 புள்ளிகள் உள்ளன என்று தேற்றம் 9-ன் வாயிலாக அறிந்தோம். f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ளதால், $[x_1, x_2]$-லும் f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளது. இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின்படி, f ஆனது $f(x_1)$-க்கும், $f(x_2)$-க்கும் இடையே ஒவ்வொரு மதிப்பையும் பெறுகிறது.

$\therefore$ f-ன் வீச்செல்லையானது $[m, M]$.

இந்தத் தேற்றத்தை

(i) $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ள f-ன் g.l.b.-ம், l.u.b.-ம் முறையே m, M என்ருல், $m<\mu<M \rightarrow f(\xi)=\mu$ என்றவாறு, குறைந்த பட்சம் ஒரு புள்ளி ξ ஆனது $[a, b]$-ல் இருக்கிறது" என்றும் அல்லது

(ii) "$[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ள f ஆனது இவ்விடை வெளியில் தன்னுடைய l.u.b., g.l.b. இடையே ஒவ்வொரு மதிப்பும் வழியேயும் செல்லுகிறது" என்றும் சொல்லுவர்.

6·5. ஓரியல்புச் சார்புகள் (Monotonic Functions)

சென்ற அத்தியாயம் 5-ல் ஓரியல்புச் சார்புகளை வரையறுத் தோம் அல்லவா? அவற்றின் பண்புகளைப் பார்ப்போம்.

$[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட f ஆனது

(i) $a \leq x' < x'' \leq b \rightarrow f(x') \leq f(x'')$ என்ருலோ, அல்லது,

(ii) $a \leq x' < x'' \leq b \rightarrow f(x') \leq f(x'')$ என்ருலோ

f ஆனது $[a, b]$-ல் ஓரியல்பானது என்பர்.

(i)-ல், x ஆனது அதிகமாக, f-ம் (அதிகமாவதால்) ஏறுவதால் f-ஐ ஒரே முறை ஏறுகிறதென்றும்,

(ii)-ல் x ஆனது அதிகமாக, f ஆனது இறங்குவதால், f-ஐ ஒரே முறை இறங்குகிறதென்றும் கூறுவர்.

f-ன் வரையறை இடைவெளியின் முனைப் புள்ளிகளிடத்து ஓரியல்புப் பண்பு இல்லை என்றால், f ஆனது திறந்த இடைவெளியில் ஓரியல்பானது என்பர்.

ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசையின் பண்புகள், ஓரியல்புச் சார்புகளின் பண்புகளுக்கு ஒத்தவை (similar).

பண்புகள்

(1) $x \geqq x_1$ என்றால் f ஆனது ஓரே முறை ஏறும் சார்பு என்றும், $f(x) < K$ (மாறிலி எண்) என்றும் கொண்டால், $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ இருக்கிறது; $\lim_{x \to +\infty} f(x) \leqq K$ என்பதும் உண்மை.

நிறுவல்

$f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n), \ldots$ என்ற ஒழுங்கு வரிசை, $x \geqq x_1$க்கு ஓரே முறை ஏறும் வரிசை என்றால்

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \leqq f(x_3) \leqq \ldots \leqq f(x_n) \leqq \ldots < K$$

இந்த ஒழுங்கு வரிசை இடது புறமாக $f(x_1)$ஆலும், வலது புறமாக K-ஆலும் வரம்புள்ளது. இந்த ஒழுங்கு வரிசைக்கு l.u.b. உண்டு. இதனை M என்க. $\therefore \varepsilon > 0 \rightarrow \mid f(x) - M \mid < \varepsilon, x \geqq x_1$.

$\therefore \lim_{x \to +\infty} f(x) = M \leqq K \quad \therefore \lim_{x \to \infty} f(x)$ இருக்கிறது. இது K-க்குச் சமமாகவோ, K-ஐவிடச் சிறியதாகவோ உள்ளது.

(2) $x \leqq x_1$-க்கு f ஆனது ஓரே முறை ஏறும் சார்பு என்றும், $x \leqq x_1$-க்கு $f(x) > K$ (மாறிலி எண்) என்றும் கொண்டால் $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ இருக்கிறது; இவ்வெல்லையானது $\geqq k$.

இதனை நிறுவ

(3) திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் f ஆனது ஓரே முறை ஏறும் சார்பு என்றும், இவ்விடைவெளியில் $f(x) > K$ (மாறிலி எண்) என்றும் கொள்க. அப்படியானால் $f(a+0)$ இருக்கிறது; $f(a+0) \geqq K$. இதனை நிறுவுக!

(4) திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் f ஆனது ஓரே முறை ஏறும் சார்பு என்றும் இவ்விடைவெளியில் $f(x) < K$ (மாறிலி எண்)

என்றும் கொள்க. அப்படியானல், $f(b-0)$ இருக்கிறது; $f(b-0) \leq K$. இதனையும் நிறுவுக!

மேற்கண்ட பண்புகளை, f ஆனது ஒரே முறை இறங்கும் சார்பு என்ருல், தக்கபடி மாற்றியமைத்துக் கொள்ளலாம்.

(3), (4) பண்புகளின்றி நாம் அறிவது: f ஆனது திறந்த இடைவெளியில் வரம்புள்ள ஓரியல்புச் சார்பு என்ருல், இவ்விடை வெளியிலோ, முனைப் புள்ளிகளிடத்தோ சாதாரணத் தொடர்ச்சி யின்மையாகத்தான் f இருக்கமுடியும்—இதனை முறையாக நிறுவுக.

f ஆனது திறந்த இடைவெளியில் ஓரியல்பாயிருந்து, வரம் பற்றதாயிருந்தால், f ஆனது ஏதாவதொரு முனைப் புள்ளியிலோ அல்லது இரு முனைப் புள்ளிகளிடத்தோ முடிவில்லாத தொடர்ச்சி யின்மையாய் இருக்கலாம்.

உதாரணமாக, $f(x)=\frac{1}{x}$, $0<x<1$ என்ருல் f ஆனது ஓரியல்பு உடையது; ஆனல் வரம்பற்றது.

6·6. ஓரியல்புச் சார்பு தொடர்ச்சியுள்ளதாகத்தான் இருக்கவேண்டுமா?

f என்ற ஓரியல்புச் சார்பானது தன் வரையறை அரங்கத்து எல்லா x-க்கும் ஏறும் அல்லது இறங்கும். ஆகையால் எந்தப் புள்ளி "a"யின் அண்மையிலும் f-க்கு அலைவு கிடையாது. தொடர்ச்சியின்மை யாதானுமிருப்பின் அது சாதாரணமாகத்தான் இருக்கும்.

உதாரணம் (1)

$$f(x)=1, \quad \frac{1}{2}<x\leq 1$$

$$f(x)=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^2}<x\leq \frac{1}{2}$$

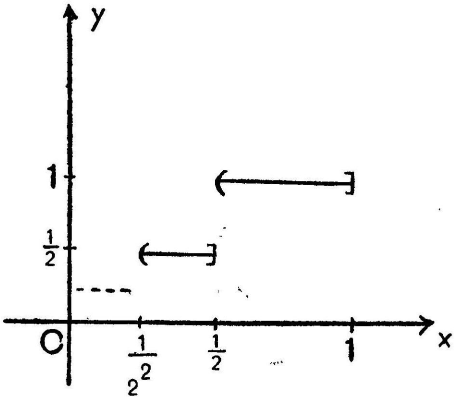
$$\vdots$$

$$f(x)=\frac{1}{2^{n-1}}, \quad \frac{1}{2^n}<x\leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$f(x=)\frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{2^{n+1}}<x\leq \frac{1}{2^n}$$ (n ஒருநேர் முழுவெண்)

. . . . . .

என்க, $f(0)=0$ என்க.



படம் 61

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2^n}\right)^+} f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \lim_{x \to \left(\frac{1}{2^n}\right)^-} f(x) = \frac{1}{2^n}$$

$\therefore f\left(\frac{1}{2^n}+0\right) \neq f\left(\frac{1}{2^n}-0\right)$ $\therefore x=\frac{1}{2^n}$ என்பது சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி. $\therefore$ முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுள்ள சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளிகள் $x=\frac{1}{2^n}$ f-க்கு இருக்கின்றன.

ஆனால் f ஆனது $[0, 1]$-ல் ஓரியல்புச் சார்பு.

$\therefore$ இது, ஓரியல்புச் சார்பு ஆனது தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டுவதில்லை என்பதற்கு உதாரணம்.

மற்றொரு உதாரணம்

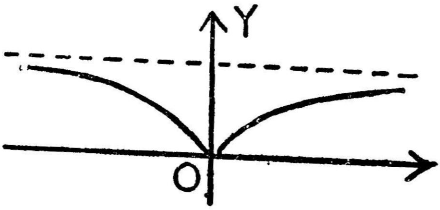
$$f(x)=\frac{|x|}{1+|x|} \quad \forall x$$

என்றவாறு உள்ள f-ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\underline{0 \leq x_1 < x_2}$ என்றால் $|x_1| < |x_2|$

$\therefore |x_1| + |x_1| \cdot |x_2| < |x_2| + |x_1| \cdot |x_2|$

$|x_1|(1+|x_2|) < |x_2|(1+|x_1|)$



படம் 62

$$\frac{|x_1|}{1+|x_1|} < \frac{|x_2|}{1+|x_2|}$$

$\therefore f(x_1) < f(x_2)$ $\therefore$ எல்லா $x \geqq 0$-க்கு f ஆனது ஏறும் சார்பு. இப்போது,

$x_1 < x_2 \leqq 0$ என்றால், $-x_1 > -x_2$

$\therefore |x_1| > |x_2|$

$|x_1| + |x_1| \cdot |x_2| > |x_2| + |x_1| \; |x_2|$

$|x_1| (1+|x_2|) > |x_2| (1+|x_1|)$

$\therefore \dfrac{|x_1|}{1+|x_1|} > \dfrac{|x_2|}{1+|x_2|}$ $\quad \therefore f(x_1) > f(x_2)$ $\quad \therefore$ எல்லா $x \leqq 0$ f ஆனது இறங்கும் சார்பு.

$\therefore f$ ஆனது, மொத்தத்தில், எல்லா x-க்கும், ஓரியல்புச் சார்பு. இப்போது $x_1 > 0$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்ளுவோம்.

$$\lim_{x \to x_1^+} \frac{|x|}{1+|x|} = \lim_{h \to 0} \frac{x_1+h}{1+x_1+h} = \frac{x_1}{1+x_1}$$

$$\lim_{x \to x_1^-} \frac{|x|}{1+|x|} = \lim_{h \to 0} \frac{x_1-h}{1+x_1-h} = \frac{x_1}{1+x_1}$$

$\therefore f(x_1+0) = f(x_1-0)$. $\therefore f$ ஆனது $x > 0$க்குத் தொடர்ச்சிச் சார்பு.

$x_1 < 0$ என்றால், $|x_1| = -x_1$

$$\therefore f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$$

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x_1+h}{x_1+h-1} = \frac{x_1}{x_1-1}$$

$$\lim_{x\to x_1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x_1-h}{x_1-h-1} = \frac{x_1}{x_1-1}$$

$$f(x_1+0)=f(x_1-0)$$

$\therefore x \leqq 0$-க்கு f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு.

$\therefore$ இது, ஓரியல்புச் சார்பு ஆனது தொடர்ச்சியாக இருக்கலாம் என்பதற்கு உதாரணம்.

மற்றொரு உதாரணம்

(0, 1)-ல் உள்ள எண்களை $x = 0 \cdot a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ என்ற வகையில் முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத தசமங்களாக எழுதவும்.

$f(x) = \left(\frac{a_1}{10}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{100}\right)^2 + \cdots$ என்க. f ஆனது ஓரியல்புச் சார்பு என்றும், முடிவுள்ள தசமம் குறிக்கும் ஒவ்வொரு x இடத்துத் தொடர்ச்சியின்மையாய் இருக்கிறது என்றும் காண்பிக்க.

x-ன் இலக்கங்கள் அதிகமாக அதிகமாக, $f(x)$ ஆனது குறைவதில்லை.

$\therefore f$ ஆனது ஓரியல்புச் சார்பு.

$x = \cdot a_1 a_2 \cdots a_m$ என்க.

$$\therefore f(x) = \frac{a_1^2}{10^2} + \frac{a_2^2}{10^4} + \cdots + \frac{a_m^2}{10^{2m}}$$

$x_1 = \cdot a_1 a_2 \cdots a_{m-1} b_m b_{m+1} \cdots$ என்பது முடிவில்லாத தசமம் என்றும் $x_1 < x$ என்றும் கொள்க.

$$\therefore x - x_1 = \frac{a_m}{10^m} - \frac{b_m}{10^m} - \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}} - \cdots > 0$$

$$f(x_1) = \frac{a_1^2}{10^2} + \frac{a_2^2}{10^4} + \cdots + \frac{a_{m-1}^2}{10^{2(m-1)}} + \frac{b_m^2}{10^{2m}} + \frac{b_{m+1}^2}{10^{2(m+1)}} + \cdots$$

$$\therefore f(x) - f(x_1) = \frac{a_m^2}{10^{2m}} - \frac{b_m^2}{10^{2m}} - \frac{b_{m+1}^2}{10^{2(m+1)}} - \cdots > 0$$

$\because x > x_1$, f ஓரியல்பானது.

x_1 என்பது x-ன் வெகு அருகில் இருந்தால், $x > x_1$ என்பதால், $x_1 = x - h$ என்க.

$\therefore$ $f(x) > f(x-h)$ என்பது, $x > x-h$ என்னும்போது, உண்மை.

$\therefore$ f ஆனது கண்டிப்பாய் (strictly) ஏறும் சார்பு.

$\therefore$ $f(x-0) < f(x) < f(x+0)$

$\therefore$ $f(x-0) \neq ; f(x)\ (x+0) \neq f(x)$.

$\therefore$ f ஆனது x இடத்து (புள்ளிவாரி) சாதாரணத் தொடர்ச்சி யின்மையாய் உள்ளது.

இஃது, f ஆனது ஓரியல்பாயினும் தொடர்ச்சியின்மையானது (சாதாரணமாய்).

மற்ற உதாரணங்கள்

$f(x) = \log x,\ 0 < x < \infty$ என்றால். f ஆனது ஒரே முறை ஏறும், தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு. $\varphi(x) = \tan^{-1} x, -\infty < x < \infty$ என்றால், φ ஆனது ஒரே முறை ஏறும், தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு.

6·7. ஒரு சீரான தொடர்ச்சி (Uniform Continuity)

$[a, b]$-ல் f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு என்க. வரை இலக்கணப்படி, $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளி c இடத்து, $\varepsilon > 0$ என்றால், $|x-c| < \delta(\varepsilon) \rightarrow |f(x) - f(c) < \varepsilon$ என்றவாறு $\delta(\varepsilon) > 0$ இருக்குமானால், f ஆனது c இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. இந்த δ ஆனது ε-ஐயும், c-ஐயும் பொறுத்தது.

ஆகையால், ஒரு குறிப்பிட்ட $\varepsilon > 0$க்கு ஒத்த $\delta > 0$ ஆனது பலப்பல c-க்கும் ஒத்தது எனக் கூறமுடியாது. அப்படி பலப்பல c-க்கும்கூட அதே $\delta > 0$ ஒத்து வந்தால் f ஆனது அவ்விடை வெளியில் " ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுள்ளது " என்கிறோம்.

வரை இலக்கணம்

f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்ற இடைவெளி என்றும் x, y என்பவை I-ன் இரு புள்ளிகள் என்றும் $\varepsilon > 0$ என்றும் கொள்க. $|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ என்றவாறு $\delta > 0$ இருந்தால் f ஆனது I-ன் மீது ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுள்ளது என்கிறோம்.

δ ஆனது x-ஐயும் y-யும் பொறுத்ததல்ல.

கவனமாய் நோக்குக

ஒரு சீரான தொடர்ச்சியானது ஒரு புள்ளியிடத்து வரையறுக்கப்படவில்லை; மாறாக, ஒரு இடைவெளியின் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

"ஒரு புள்ளியிடத்துத் தொடர்ச்சி" என்று சொல்லலாம்; ஆனால் "ஒரு புள்ளியிடத்துச் சீரான தொடர்ச்சி" என்பது பொருளற்றது.

தேற்றம்

மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளதென்றால், அவ்விடைவெளியில் f ஆனது ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுள்ளது.

நிறுவல்

f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளதால் 6·4 தேற்றம் 7-ன்படி, $| f(x')- f(x'') | < \frac{\varepsilon}{2}$ என்றபடி $[a, b]$-ஐ உள் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கமுடியுமென்றும், இவ்விடைவெளிகளின் ஒன்றில் x', x'' என்பவை யாதானுமிரு புள்ளிகள் என்றும் நமக்குத் தெரியும்.

இப்போது δ என்பது இவ்விடைவெளிகளின் நீளங்களின் g.l.b என்று கொள்க. ∴ δ என்பது $\leq \min\{(x_1-a), (x_2-x_1), \dots (b-x_{n-1})\}$ $[a,b]$-ல், x', x'' என்று இரு புள்ளிகளை $| x'-x'' | < \delta$ என்றவாறு எடுத்துக் கொள்க.

இரு செயற்கூடு நிகழ்ச்சிகள்

நிகழ்ச்சி 1

புள்ளிகள் x', x'' என்பவை ஓரே உள்வெளியில் இருக்கலாம்.

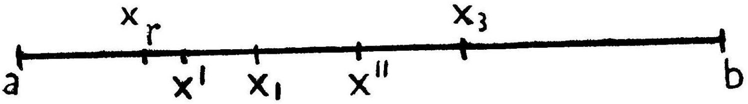
அப்போது $| f(x')-f(x'') | < \frac{\varepsilon}{2}$

$$< \varepsilon, \ \forall\ x'', x \in [a, b], \ | x'-x'' | < \delta$$

∴ வரை இலக்கணப்படி, f ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுள்ளது.

நிகழ்ச்சி 2

x', x'' என்பவை அடுத்தடுத்த இரு உள் இடைவெளிகளில், ஒரு இடைவெளியில் x'-ம், மற்றொன்றில் x''-ம் இருக்கலாம்.



படம் 63

உதாரணமாக, x' ஆனது (x_r, x_1)-லும், x'' ஆனது (x_1, x_s)-லும் இருக்கட்டும்.

அப்போது, 6·4 தேற்றம் 7-ன்படி,

$$|f(x')-f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'')-f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\therefore |f(x')-f(x'')| = |f(x')-f(x_1)+f(x_1)-f(x'')|$$

$$\leqq |f(x')-f(x_1)| + |f(x'')-f(x_1)|$$

$$> \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad |x'-x''| < \delta.$$

$\therefore f$ ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுள்ளது.

கவனிக்க

மேற்கண்ட தேற்றத்தில் f-ன் வரையறை அரங்கம் மூடிய இடைவெளியாயிருத்தல் வேண்டும் என்பதைக் கூர்ந்து கவனிக்க! திறந்த இடைவெளியாயிருந்தால் f ஆனது ஒரு சீரான தொடர்ச்சியாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. இதனை விளக்க இதோ ஒரு உதாரணம்:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$ என்க.

$\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ என்க. $x' = \frac{\delta}{\delta+1}$, $x'' = \frac{\delta}{(\delta+1)^2}$ என்க.

$\therefore$ x'-ம், x''-ம் $(0, 1)$-ல் இருக்கின்றன.

$$|x'-x''| = \left|\frac{\delta}{\delta+1} - \frac{\delta}{(\delta+1)^2}\right| = \left|\frac{\delta(\delta+1)-\delta}{(\delta+1)^2}\right| = \delta\left(\frac{\delta}{\delta+1}\right) < \delta$$

$$\therefore |f(x')-f(x'')| = \left|\frac{\delta+1}{\delta} - \frac{(\delta+1)^2}{\delta}\right| = \left|\frac{-(\delta+1)-\delta}{\delta}\right|$$

$$= \delta + 1 > 1 = \varepsilon$$

$\therefore |f(x')-f(x'')| > \varepsilon$ என்றால் f ஆனது $(0, 1)$-ல் ஒரு சீரான தொடர்ச்சியாயில்லை. ஆனால் இத்தனைக்கும் f ஆனது $(0, 1)$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ளது. மேலும் f ஆனது $[0, 1]$-ல் தொடர்ச்சியாயில்லை. (குறிப்பாக $x=0$ இடத்து).

6·8. நேர்மாறு சார்புகள் (Inverse Functions)

தேற்றம்

f ஆனது $a \leq x \leq b$-ல் தொடர்ச்சியாயும் **கண்டிப்பாய் ஏறும்** (அல்லது இறங்கும்) தன்மையாயும் உள்ள சார்பு என்றால், f-ன் வீச்செல்லை $A \leq y \leq B$ என்ற இடைவெளி ஆகும். இவ்விடைவெளியை வரையறை அரங்கமாகக் கொண்ட ஒரே முறை சார்பு ஒன்று φ இருக்கிறது. f-ம், g-ம் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு சார்பு எனப்படுவன.

f ஆனது $[a, b]$-ல் **கண்டிப்பாய்** ஏறும் (அல்லது இறங்கும்) சார்பானால், φ-ம் $[A, B]$-ல் தொடர்ச்சியான கண்டிப்பாய் ஏறும் (அல்லது இறங்கும்) சார்பாகும்.

நிறுவல்

f ஆனது **கண்டிப்பாய்** ஏறும் சார்பென்க. அதாவது,

$a \leq x' < x'' \leq b$ என்றால், $f(x') < f(x''), f(x') \neq f(x'')$. அதாவது $y=f(x)$ எனில், $y'=f(x'), y''=f(x'')$ எனில், $y' < y''$, $a \leq x' < x'' < b$ அதாவது, $[a, b]$-ல் யாதானும் இரு புள்ளிகளிடத்து f-ன் மதிப்புகள் சமமல்ல.

$f(a)=A, f(b)=B$ என்க. A-ம், B-ம் $[a, b]$-ல் f-ன் வரம்புகள்.

f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ளதால், f ஆனது $[A, B]$-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்து அடைகிறது.

$\therefore$ $y=f(x)$ என்றால் $A \leq y \leq B$.

f ஆனது கண்டிப்பாய் ஏறும் சார்பெனில், y மதிப்புகளும் கண்டிப்பாய் ஏறுகின்றன என நிறுவலின் ஆரம்பத்தில் பார்த்தோம்.

யாதாமொரு G-ஐ $[A, B]$-ல் எடுத்துக்கொள்க. அதாவது, $A \leq C \leq B$. இப்போது $f(\alpha)=C$ என்றவாறு, $[a, b]$-ல் $x=\alpha$ என்ற **ஒரே ஒரு** புள்ளிதான் உள்ளதெனக் காண்பிக்கலாம்.

முடியுமாஞல், $\alpha,\ \beta \in [a, b]$ என்றும், $f(\alpha)=C=f(\beta)$ என்றும் கொள்க. $\therefore f(\alpha)=f(\beta)$. இது "$f$ ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரேமுறை கண்டிப்பாய் ஏறும் சார்பு" என்பதற்கு எதிர் மறுப்புதானே?

$\therefore [A, B]$-ன் ஒவ்வொரு C-க்கும், $[a, b]$-ல் ஒரே ஒரு α-தான் உள்ளது. இந்தத் தொடர்பை φ என்ருல் $x=\varphi(y)$ என்று எழுதலாம்.

$x=\varphi(y),\quad y=f(x)$.

φ-ஐ f-ன் நேர்மாறு என்போம். இதனையே $\varphi=f^{-1}$ என்றும், $x=f^{-1}(y)$ என்றும் குறியிடுவர்.

இப்போது $[A, B]$-ல் φ ஆனது கண்டிப்பாய் ஏறும் சார்பு என நிறுவலாம்.

$A \leqq y \leqq B$-ல் $y_1,\ y_2$ என்ற இரு மதிப்புகள் $y_2>y_1$ என்றவாறு இருக்கட்டும்.

$y_1=f(x_1)$ என்றும், $y_2=f(x_2)$ என்றும் கொள்க.

$\therefore\quad x_1=\varphi(y_1),\quad x_2=\varphi(y_2)$.

f ஆனது கண்டிப்பாய் ஏறுவதால், $x_2>x_1$-க்கு, $f(x_2)>f(x_1)$

$\therefore\quad y_2>y_1$.

$y_2>y_1 \rightarrow x_2=\varphi(y_2)>\varphi(y_1)=x_1$.

$\therefore\quad \varphi$ ஆனது கண்டிப்பாய் ஏறுகிறது.

இப்போது, φ ஆனது $[A, B]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென நிறுவலாம். $\varepsilon>0$ என்க.

$\delta_1,\ \delta_2>0$ என்ருல், $f(x_1-\varepsilon)=y_1-\delta_1,\ f(x_1+\varepsilon)=y_1+\delta_2$ என்க.

f ஆனது கண்டிப்பாய் ஏறுவதால், $x \in [x_1-\varepsilon,\ x_1+\varepsilon]$

$$\rightarrow y \in [y_1-\delta_1,\ y_1+\delta_2]$$

$\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$ என்ருல்,

$|y-y_1|<\delta \rightarrow |x-x_1|<\varepsilon$, அதாவது, $|\varphi(y)-\varphi(y_1)|<\varepsilon$.

$\therefore\quad \varphi$ ஆனது y_1 என்ற யாதாமொரு புள்ளியிடத்துத் தொடர்ச்சியுள்ளது.

$\therefore\quad \varphi$ ஆனது $[A, B]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது.

இதேபோல், f ஆனது கண்டிப்பாய் இறங்கும் சார்பென்ருல், தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

உதாரணங்கள் (1) $f(x)=\log x$, $(0, \infty)$ என்றால் f ஆனது கண்டிப்பாய் ஒரே முறை ஏறும் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு என்றறிவோம்.

$\therefore$ ஒவ்வொரு முடிவுள்ள இடைவெளி $0<a\leq x\leq b<\infty$-லும், $f=\log$-ன் நேர்மாறு சார்பு f^{-1}ஐ வரையறுக்க முடியும். (மேற்கண்ட 6.8 தேற்றம்). $0<a<b<\infty$ என்றால் f^{-1} ஆனது a, b-ஐப் பொறுத்ததல்ல.

$\therefore$ $(0, \infty)$ என்ற முழு இடைவெளியில் log-ஐ நேர்மாருக்கலாம். log-ன் நேர்மாறு சார்பை exp சார்பு, அதாவது அடுக்குக் குறிச் சார்பு (exponential function) என்பார்கள்.

$\therefore$ $\exp(\log x)=x$, $0<x<\infty$, அதாவது $e^{\log x}=x$.

exp ஆனது எல்லா x-க்கும் வரையறுக்கப்படுகிறது. exp ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளது, ஒரே முறை ஏறுவது. $e^x>0$, எல்லா xக்கும்.

மற்றொரு உதாரணம் (2)

$f(x)=\tan^{-1}x$ என்றால் f ஆனது $(-\infty, \infty)$-ல் கண்டிப்பாய் ஒரே முறை ஏறுவதுடன் தொடர்ச்சியாயும் உள்ளது. $\therefore$ ஒவ்வொரு முடிவுள்ள இடைவெளி $-\infty<a\leq x\leq b<\infty$-ல், $f=\tan^{-1}$-ன் நேர்மாறை வரையறுக்க முடியும்.

$a<b$ என்பதுதான் a, b-ன் மீது ஒரே ஒரு கட்டுப்பாடு.

$\therefore$ $(-\infty, \infty)$ முழு இடைவெளியில் $\tan^{-1}$-ஐ, அதாவது, arc tan-ஐ நேர்மாருக்கலாம். இந்த $\tan^{-1}$-ன் நேர்மாறு சார்பைத் தான் tan சார்பு என்கிறோம்.

tan-ன் வரையறை அரங்கம்: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

tan ஆனது இந்த இடைவெளியில் ஒரே முறை ஏறும் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $f(x) = x, \quad [0, 1]$

$= x - 2, \quad 1 < x \leq 2$

என்றால் f ஆனது $x = 1$ இடத்துத் தொடர்ச்சியற்றது எனக் காண்பிக்க.

2. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}, \; x \neq 0$

$= 0, \quad x = 0$

என்றால் f ஆனது $x = 0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியற்றது என நிறுவுக.

3. $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}, \; x \neq 0$

$= 0, \quad x = 0$

என்றால் $x = 0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளது என நிறுவுக.

4. $f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \; x \neq 0$

$= 0, \quad x = 0$

என்றால் $x = 0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளது எனக் காண்பிக்க.

5. $f(x) = \cos x, \; \forall x$ என்றால் f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளது என நிறுவுக.

6. $f(x) = 0, \quad x^2 > 1$

$= 1, \quad x^2 < 1$

$= \frac{1}{2}, \quad x^2 = 1$

என்றால் $x = 1, -1$ என்ற புள்ளிகளிடத்து மட்டும் f ஆனது தொடர்ச்சியற்றது என நிறுவுக.

7. $f(x) = 0$, x விகிதமுறு எண்

$= 1$, x விகிதமுறாத எண்

என்றால் f ஆனது α என்ற எண்ணிடத்துத் தொடர்ச்சியைப் பற்றி ஆய்க.

8. $f(x)=0$, x விகிதமுருத எண்

$= \frac{1}{q}$, x விகிதமுறு எண் $= \frac{p}{q}$, p, q என்பவை ஒன்றுக்கொன்று பகா நேர் முழுவெண்கள்.

என்றால் $x=\alpha$ என்ற எண்ணிடை f-ன் தொடர்ச்சியைப்பற்றி ஆராய்க.

9. $f(x)=\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}$, x விகிதமுறு எண்$=\frac{p}{q}$ (சுருக்கிய பின்னம்)

$=x$, x விகிதமுருத எண்

என்றால் $x=\alpha$ இடத்து f-ன் தொடர்ச்சியை ஆராய்க.

10. $f(x)=x^2 \sin\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$

$=0$, $-1 \leq x \leq 1$.

என்றால் f ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியுள்ளதென்றும் f ஆனது $-1 \leq x \leq 1$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளதென்றும், $[-1, 1]$-ல் f ஆனது வரம்புள்ளது, ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுள்ளதென்றும் நிறுவுக.

11. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $0< x \leq 1$ என்றால் f ஆனது கொடுத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுள்ளதென்றும், ஆனால் ஒரு சீரான தொடர்ச்சியற்றதென்றும் நிறுவுக.

12. $f(x)=x$, $0 \leq x < \frac{1}{2}$

$=0$, $x=\frac{1}{2}$

$=1-x$, $\frac{1}{2}< x \leq 1$

என்றால் $x=\frac{1}{2}$ இடத்து f-க்கு நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை உண்டு எனக் காண்பிக்க.

13. $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $x=1$ என்றால், $x=1$ இடத்து f-க்கு முடிவில்லாத தொடர்ச்சியின்மை உண்டு எனக் காண்பிக்க.

14. $f(x)=e^{-(1/x)}$ என்றால் f-க்கு $x=0$ இடத்து முடிவில்லாத தொடர்ச்சியின்மை உண்டு என நிறுவுக.

15. $f(x)=-1-x^2$, $x<0$

$=0$, $x=0$

$=1+x^2$, $x>0$

என்றால் $x=0$ என்பதுமட்டும்தான் f-ன் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி என நிறுவுக.

7. வரம்புள்ள மாறல் சார்புகள்

(Functions of Bounded Variation)

f என்பது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு என்க.

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ என்று ஏறும் ஒழுங்கு வரிசைப் புள்ளிகளால் $[a, b]$-ஐ முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உள்ளுக்குள்ளான உள் இடைவெளி களாகப் பிரிக்க.

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) |$$ என்ற தொகையைக் கருதுக.

$[a, b]$-ஐ முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உள்ளுக்குள்ளான உள் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கும் ஒவ்வொரு முறைக்கும் ஒத்த ஒரு எண் ν ஆனது இருக்கிறது.

$[a, b]$-ஐ முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உள்ளுக்குள் ளான உள் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கும் எல்லா விதமான முறை களையும் எடுத்துக் கொள்க. இவ்வாறாகக் கிடைக்கும் எல்லா ν-க்களும் S என்ற கணத்தை அமைக்கட்டும். இந்த S கணமானது மேல்வரம்புள்ளதனால் f-ஐ $[a, b]$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட வரம்புள்ள மாறல் சார்பு அல்லது முடிவுள்ள மாறல் சார்பு (function of finite variation) என்பர். V ஆனது மேல்வரம்புள்ள S-ன் l.u.b. என்க. இப்போது V-ஐ, $[a, b]$-ல் f-ன் "மொத்த மாறல்" (Total variation) என்போம்.

"வரம்புள்ள மாறல் சார்பு" என்ற கருத்தை உருவாக்கியவர் ஜோர்டான் (Jordan) என்ற கணித மேதையாவார். இந்த அழகிய தத்துவத்தை, அவர் ஃபூரியர் தொடரைப்பற்றிய முறை (treatment

of Fourier series) யில், மிக நேர்த்தியாகக் கையாண்டு அற்புத முடிவுகளைக் கண்டிருக்கிறார்.

வரை இலக்கணம்

இயலக்கூடிய எல்லாத் தொகைகள் v-ன் கணத்தின் l.u.b. ஆனது $[a, b]$-ன் மீது f-ன் மொத்த மாறல் எனப்படும். இதனை V எனக் குறித்தால், $V<+\infty$, அதாவது V ஆனது முடிவுள்ளது.

குறிப்பு

$[a, b]$ ல் f-ஆனது வரம்புள்ள மாறல் சார்பென்றால், $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு வகை உட்பிரிவினைக்கும்,

$$v = \sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | \leq V \text{ என்றவாறு ஒரு எண் } V \text{ இருப்ப}$$

துடன், $\varepsilon>0$ என்றால் குறைந்த பட்சம் ஒருவகை உட்பிரிவினைக்கு $v>V-\varepsilon$ என்பது உண்மையாகும்.

$[a, b]$-ல் f-ஆனது வரம்புள்ள மாறல் சார்பானால், $[c, d]\subset[a, b]$ யிலும், f ஆனது வறம்புள்ள மாறல் சார்பாகும்.

தேற்றம் 1

$[a, b]$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஓரியல்புச் சார்பானது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் சார்பாகும்.

நிறுவல்

f-ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரே முறை ஏறும் சார்பென்க. அப்போது $f(x_2)-f(x_1)\geqq 0,\ x_2>x_1$

$$\therefore\ v = \sum_{i=1}^{n} | f(x_i)-f(x_{i-1}) |$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i)-f(x_{i-1})\}$$

$$= f(x_n)-f(x_0) = f(b)-f(a)$$

$\therefore$ எந்த ஒரு பிரிவினைக்கும் ஒத்த மாறல் ஆனது

$= f(b)-f(a)$ (மாறிலி எண்)

$\therefore$ மொத்த மாறல் $V = f(b)-f(a)$

இதேபோல், f ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரே முறை இறங்கும் சார்பு என்றல், மொத்த மாறலானது $\{f(a)-f(b)\}$ ஆகும். ஆகையால் இந்நிகழ்ச்சியிலும்கூட f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் சார்பாகும்.

நேர், எதிர் (குறை) மாறல் (Positive and Negative Variation)

$f(x_i) - f(x_{i-1})$ என்ற வேறுபாடு நேர் ஆகவோ (positive), எதிராகவோ, அதாவது, குறைவாகவோ (negative) இருக்கலாம். நேர் வேறுபாடுகளின் தொகை(sum of positive differences)யை p என்றும், குறை வேறுபாடுகளின் தொகை (sum of negative differences)யை n என்றும் குறிக்க.

ஆகையால்,

1. $$p-n=\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i)-f(x_{i-1})\}=f(b)-f(a)$$

ஆனல்

2. $$p+n=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=v,$$ ஏனெனில்,

$f(x_i)-f(x_{i-1})$ ஆனது குறையாயிருந்தால், $|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ ஆனது நேர் ஆகும்.

சமன்பாடுகள் (1), (2)-லிருந்து

3. $p=\frac{1}{2}\{v+f(b)-f(a)\}$

4. $n=\frac{1}{2}\{v-f(b)+f(a)\}$

p-ஐ "நேர்மாறல்" என்றும், $-n$-ஐக் "குறை மாறல்" என்றும் சொல்லுவோம்.

$\therefore$ $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு வகைப் பிரிவினைக்கும் ஏற்ப, v, p, n இருக்கின்றன. f ஆனது வரம்புள்ள மாறலாதலால், v க்கள் அமைக்கும் கணம் வரம்புள்ளது என்பதறிவோம். $\therefore$ (3), (4 லிருந்து தொகைகள் p-ம், n-ம் கூட வரம்புள்ளவைதான் எனத் தெரிந்துகொள்ளுகிறோம்.

$\therefore$ P, N என்பவை, முறையே, தொகைகள் p, n-ன் l.u.b. என்றல்,

$$P=\tfrac{1}{2}\{V+f(b)-f(a)\}$$

$$N=\tfrac{1}{2}\{V-f(b)+f(a)\}.$$

P-ஐ $[a, b]$-ன் மொத்த நேர்மாறல் என்றும், N-ஐ $[a,b]$-ன் மொத்த குறை மாறல் என்றும் வரையறுப்போம்.

$V=P+N$ என்பது தெளிவு.

f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் சார்பு என்றால், $[a, x]$லும் அப்படியே, $(a \leqq x \leqq b)$

$V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ என்பவை $[a, x]$-ல் முறையே f-ன் மொத்த மாறல், மொத்த நேர் மாறல், மொத்த குறை மாறல் என்றால்

$$P(x)=\tfrac{1}{2}\{V(x)+f(x)-f(a)\}$$

$$N(x)=\tfrac{1}{2}\{V(x)-f(x)+f(a)\}$$

$$V(x)=N(x)+P(x)$$

$$f(x)=P(x)-N(x)+f(a)$$

என்பவை உண்மை, உண்மை, உண்மையே.

$V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ என்பவையாவும் ஒரே முறை ஏறுவன.

$[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு வரம்புள்ள மாறல் சார்பும், $[a, b]$-ல் வரம்புடைத்து.

தேற்றம் 2

$[a, b]$-ன் மீதுள்ள ஒரு வரம்புள்ள மாறல் சார்பை இரண்டுமே ஏறும் அல்லது இரண்டுமே இறங்கும் ஓரியல்புச் சார்புகளின் (இரண்டுமே ஏறும், அல்லது இறங்கும்) வேறுபாடானது வரம்புள்ள மாறல் சார்பாகும்.

நிறுவல்—பாகம் I

$a \leqq x \leqq b$ என்றால், $P(x), -N(x)$ என்பவை முறையே, $[a, x]$-ல் நேர், குறை மாறல்கள் என்க.

P, N இவற்றின் வரை இலக்கணப்படி,

$$f(x)-f(a)=P(x)-N(x)$$

P-ம், N-ம் நேர், ஒரே முறை ஏறும் சார்புகள்.

$$f(x) = P(x) + f(a) - N(x)$$

$$f(x) = [P(x)+f(a) + |f(a)|]-[N(x)+|f(a)|]$$

வலது பக்கத்தில் வேறுபாட்டின் அடைப்புகளில் இருப்பவை ஒரே முறை ஏறும் சார்புகளைக் கொடுப்பன.

இப்போது $f(x) = P(x) + f(a) - N(x)$ என்பதை

$$f(x) = \{ \mid f(a) \mid - N(x) + f(a)\} - \{ \mid f(a) \mid - P(x)\}$$

என்றவாறு எழுதினால், $-N$-ம், $-P$-ம் ஒரே முறை இறங்கும் சார்புகள் என்பதால், வலது பக்கத்தின் வேறுபாட்டின் அடைப்புகளில் இருப்பவை ஒரே முறை இறங்கும் சார்புகளைக் கொடுப்பன.

பாகம் 2 (மறுதலை)

F, G என்பவை $[a, b]$-ன் மீதான வரம்புள்ள ஒரே முறை ஏறும் சார்புகள் என்க.

$f(x) = F(x) - G(x)$ என்க.

$[a, b]$-ன் ஏதாவதொரு வகை உட்பிரிவினைப் புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க.

உதாரணமாக, $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ என்க.

அப்போது, $f(x_i) - f(x_{i-1}) = [F(x_i) - F(x_{i-1})] - [G(x_i) - G(x_{i-i})]$

$$\therefore \quad v = \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} + \sum_{i=1}^{n} \{G(x_i) - G(x_{i-1})\}$$

$$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)]$$

$\therefore$ f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல்.

இப்போது, F-ம், G-ம் ஒரேமுறை இறங்கும் சார்புகளென்றால் $f(x_i) - f(x_{i-1}) = \{G(x_{i-1}) - G(x_i)\} - \{F(x_{i-1}) - F(x_i)\}$ என்றெழுதலாம்.

$$\text{இப்போது } v = \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid$$

$$= [G(b) - G(a)] + [F(b) - F(a)]$$

$\therefore$ f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் ஆகும்.

இந்தத் தேற்றத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம் :

மூடிய இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பானது அவ்விடைவெளியில் வரம்புள்ள மாறலாக இருக்க வேண்டுவதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனையாவது, "அந்த சார்

பானதை இரண்டுமே ஒரே முறை ஏறும் அல்லது இறங்கும் சார்புகளின் வேறுபாடாக, எழுத முடியவேண்டும்'' என்பது தான்.

தேற்றம் 3

f, g என்பவை இரண்டும் வரம்புள்ள மாறல் சார்புகள் என்றால் $f \pm g$, fg என்பவையும் அப்படியே.

நிறுவல்

$f(x)=F_1(x)-G_1(x)$, $g(x)=F_2(x)-G_2(x)$ என்க. இங்கே F_1, G_1, F_2, G_2 என்பவை நேர், ஒரே முறை ஏறும் சார்புகள் என்க.

$$f(x)+g(x)=[F_1(x)+F_2(x)]\ [g, (x)+G_2(x)$$

$\therefore$ தேற்றம் 2-ன் படி $f+g$ ஆனது வரம்புள்ள மாறல் ஆகும்.

இப்போது, $f(x)-g(x)=F_1(x)-F_2(x)+G_2(x)-G_1(x)$

$$=[F_1(x)+G_2(x)]-[F_2(x)]$$

$\therefore$ தேற்றம் 2-ன்படி $f-g$ ஆனது வரம்புள்ள மாறல் ஆகும். இப்போது,

$$f(x)\,g(x)=[F_1(x)\,F_2(x)+G_1(x)\,G_2(x)]-[F_1(x\ G_2(x)+G_1(x)\,F_2(x)]$$

$\therefore$ தேற்றம் 2-ன் படி fg-ம் வரம்புள்ள மாறல் ஆகும்.

தேற்றம் 4

$[a, b]$-ல் f ஆனது வரம்புள்ள மாறல் சார்பு என்றும், $|f(x)|>\lambda>0, \lambda\in[a, b]$ என்றால், $\frac{1}{f}$-ம் வரம்புள்ள மாறல் ஆகும்.

நிறுவல்

$$\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right| = \left|\frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{f(x_i)\,f(x_{i-1})}\right|$$

$$=\frac{|f(x_{i-1})-f(x_i)|}{|f(x_i)|\ |f(x_{i-1}|}=\frac{|f(x_i)-f(x_{i-1})|}{|f(x_i)|\ f(x_{i-1})}$$

$$<\tfrac{1}{2}\,|f(x_i)-f(x_{i-1})|,\quad |f(x)|>\lambda$$

$$=\frac{I}{\lambda^2},\ I \text{ மொத்த மாறல்}$$

$\therefore \quad \dfrac{1}{f}$-ம் வரம்புள்ள மாறலாகும்.

கிளைத் தேற்றம்

f-ம், g-ம் வரம்புள்ள மாறல் சார்புகள் என்றால், $g(x) \geqq \mu > 0$ என்றால், $\dfrac{f}{g}$-ம் வரம்புள்ள மாறல் சார்பே.

தேற்றங்கள் (3), (4)-ஐப் பயன்படுத்த இக்கிளைத் தேற்றம் உண்மையென நிறுவலாம்.

தேற்றம் 5

வரம்புள்ள மாறல் சார்புக்குச் சாதாரண தொடர்ச்சியின்மைகள் தான் இருக்க முடியும்.

நிறுவல்

f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் சார்பு என்க. தேற்றம் 2-ன்படி, f-ஐ இரு ஓரியல்புச் சார்புகளின் வேறுபாடாக எழுத முடியுமெனக் கண்டோம்.

$f = F - G$ என்க. F-ம், G-ம் ஓரியல்புச் சார்புகளென்க. முதலில் F-ஐக் கருதுவோம். F ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரே முறை ஏறும் சார்பு என்க.

$\therefore \; a < t < x$ என்றால் $F(a) < F(t) < F(x)$

எல்லா t-க்கும், $F(t)$ எண்கள் கணமானது $F(x)$-ஐ மேல் வரம்பாகக் கொண்டது; ஆகையால் இதற்கு l.u.b. உண்டு. இதனை M என்க.

$\therefore \; M < F(x)$. இப்போது $M = F(x-0)$ என நிறுவுவோம்.

$\varepsilon > 0$ என்க.

I. l.u.b-ன் வ. இ. படி, $a < x - \delta < x$, $M - \varepsilon < F(x - \delta) < M$ என்றவாறு $\delta > 0$ இருக்கிறது.

F ஆனது ஓரியல்பு ஏறும் சார்பாதலால், $x - \delta < t < x$-ல்,

II. $F(x - \delta) < F(t) < M$

சமன்பாடுகள் I, II-லிருந்து, $M - \varepsilon < F(t) < M < M + \varepsilon$

$\therefore \; M - \varepsilon < F(t) < M + \varepsilon$

(அ-து) $|F(t)-M|<\varepsilon, \quad x-\delta<t<x$

$$\therefore\ F(x-0)=M=\underset{a<t<x}{\text{l.u.b.}}\ F(t)$$

இதேபோல், $F(x+0)=\underset{x<t<b}{\text{g.l.b.}}\ f(t)$ என நிறுவலாம் (நீங்கள் தான் நிறுவுங்களேன்!).

$\therefore\ F(x-0),\ F(x+0)$ இருக்கின்றன.

ஆனால், $F(x+0)\neq F(x-0)$ என்றால் F-க்கு x இடத்துச் சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மை என்று பொருள்; வேறு வகைத் தொடர்ச்சியின்மை கிடையாது.

$\therefore$ ஒரே முறை ஏறும் அல்லது ஒரே முறை இறங்கும் சார்புக்குச் சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மை இருக்கலாம்.

$\therefore$ F-க்கும், G-க்கும் சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளிகள் இருக்கலாம்.

$\therefore$ f-க்குச் சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளிகள் இருக்கலாம்; வேறுவகைத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளிகள் கிடையா.

தேற்றம் 6

$a<c<b$ என்க. $[a, b]$-யிலும், $[c, b]$-யிலும் f ஆனது வரம்புள்ள மாறல் என்றால், f ஆனது $[a, b]$-லும் வரம்புள்ள மாறலே.

நிறுவல்

$[a, b]$-ன் யாதாமொரு வகைப் பிரிவினையைக் கருதுக. v, v_1, v_2 என்பவை முறையே $[a, b]$-ல், $[a, c]$-ல் $[c, b]$-ல் f-ன் மாறல்கள் என்க. இந்தப் பிரிவினைப் புள்ளிகளிலொன்று c உடன் ஒன்றிவிட்டால், (அதாவது, c என்றால்), $v=v_1+v_2$ என்பது தெளிவு. எப்படியெனில், $x_m=c$ என்க.

$$\begin{aligned} v=&[f(x_1)-f(x_0)]+[f(x_2)-f(x_1)]\\ &+\dots+[f(x_m)-f(x_{m-1})]+[f(x_{m+1})-f(x_m)]+\dots\\ &\qquad+[f(x_n)-f(x_{n-1})]\\ =&[f(x_1)-f(a)]+\dots+[f(c)-f(x_{m-1})]+[f(x_{m+1})-f(c)]\\ &\qquad+\dots+[f(b)-f(x_{n-1})] \end{aligned}$$

$$=\{[f(x_1)f-(a)]+\ldots+[f(c)\mid f(x_{m-1})]\}$$
$$+\{[f(x_{m+1})-f(c)]+\ldots+[f(b)-f(x_{n-1})]\}$$
$$=v_1+v_2$$

அப்படி c ஆனது ஒரு பிரிவினைப் புள்ளியுடன் ஒன்றாது, x_i, x_{i+1} என்ற புள்ளிகளின் நடுவே இருக்கிறது என்க.

அப்படியானால்,

$$|f(x_{i+1})-f(x_i)| \leqq |f(x_{i+1})-f(c)| + |f(c)-f(x_i)|$$

$$\therefore v \leqq v_1+v_2$$

V_1, V_2 என்பவை முறையே $[a,c]$, $[c,b]$-ல் f-ன் மொத்த மாறல்கள் என்றால்,

$$v_1 \leqq V_1, \quad v_2 \leqq V_2.$$

$$\therefore v \leqq V_1+V_2.$$

$\therefore f$ ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறலாகும்..

தேற்றம் 7

$a<c<b$ என்றும், f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் என்றும், V, V_1, V_2 என்பவை முறையே $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$-ல் f-ன் மொத்த மாறல்கள் என்றும் கொண்டால்,

$$V=V_1+V_2.$$

நிறுவல்

தேற்றம் 6-ன்படி, f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் என்பதால், f ஆனது $[a, c]$, $[c,b]$ யிலும் வரம்புள்ள மாறல்களே.

I. $\therefore V \leqq V_1+V_2$

$\epsilon>0$ என்க. v_1, v_2 என்பவை முறையே, $[a, c]$, $[c, b]$-ல் f-ன் மாறல்கள் என்க.

II. $\therefore V_1-\frac{\epsilon}{2}<v_1$; $V_2-\frac{\epsilon}{2}<v_2$ என்றவாறு $[a, c]$-யிலும், $[c, b]$-யிலும் ஒரு பிரிவினை இருக்கின்றது.

III. $\therefore V_1+V_2-\epsilon<v_1+v_2$

f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் சார்பாதலால், மேற்கண்ட $[a, c]$, $[c, b]$-ன் பிரிவினைகள் $[a, b]$-ல் ஒரு பிரிவினையை

IV. $v_1+v_2 \leqq V$ என்றவாறு ஏற்படுத்துகின்றன.

$\therefore$ III, IV-லிருந்து

V. $V_1+V_2-\varepsilon \leqq V$ என்பது தெளிவு.

$\therefore$ I, V-லிருந்து,

$V=V_1+V_2$.

கிளைத் தேற்றம்

ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் f ஆனது ஓரியல்பு என்றவாறு $[a, b]$-ஐ முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உள் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்க முடியுமானல், f ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புள்ள மாறல் சார்பாகும்.

தேற்றம் 8

$[a, b]$-ல் f ஆனது வரம்புள்ள மாறல் சார்பு என்க. $c \in [a, b]$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளதென்க. அப்படியானல் $x=c$ இடத்து V, P, N ஆகியவையும் தொடர்ச்சியாயுள்ளன.

நிறுவல்

$\varepsilon>0$ என்க.

$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < c$ என்ற $[a, c]$-ன் பிரிவினை

$V(c) - \frac{\varepsilon}{2} < v \leqq V(c)$ என்றவாறு உள்ளது.

f ஆனது $x=c$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால், $\delta>0$,

$0<c-x<\delta \rightarrow |f(x)-f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

x_{n-1} புள்ளியானது $0<c-x<\delta$-ல் இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்; தவறில்லை; இல்லாவிடில் புதிய புள்ளியொன்றைச் சேர்த்துக் கொள்க.

$$|f(c)-f(x_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore v = \sum_{r=0}^{n-1} |f(x_{r+1})-f(x_r)|$$

$$= \sum_{r=0}^{n-2} |f(x_{r+1})-f(x_r)| + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$= \sum_{r=0}^{n-2} |f(x_{r+1}) - f(x_r)| + |f(c) - f(x_{n-1})|$$

$$\leq V(x_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\leq V(c-0) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\because$ V ஆனது ஒரே முறை ஏறும் சார்பு.

$$\therefore V(c) - \frac{\varepsilon}{2} < V(c-0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore V(c) < V(c-0) + \varepsilon$$

$$\therefore V(c) \leq V(c-0)$$

V ஆனது ஒரே முறை ஏறும் சார்பாதலால்,

$$V(c) \nless V(c-0)$$

$$\therefore V(c) = V(c-0)$$

இதேபோல், $V(c) = V(c+0)$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore V(c-0) = V(c+0)$$

$\therefore$ V ஆனது $x=c$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

இதேபோல் P, N இவையிரண்டும் $x=c$ இடத்துத் தொடர்ச்சியுள்ளன என நிறுவலாம்.

கிளைத் தேற்றம்

வரம்புள்ள மாறல் தொடர்ச்சிச் சார்பை, இரண்டுமே ஓரியல்பு ஏறும் அல்லது இறங்கும் தொடர்ச்சிச் சார்புகளின் வேறுபாடாக எழுதலாம். (நிறுவுக !)

பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) $f(x)=x \sin \frac{1}{x}, \quad x>0$

$=0, \qquad x=0$

என்றால், f ஆனது $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ல் தொடர்ச்சியுள்ளது, ஆனால் வரம்புள்ள மாறல் சார்பல்ல என நிறுவுக.

(2) $f(x)=x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad x>0$

$=0, \qquad x=0$ என்றால்,

ஆனது $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ல் தொடர்ச்சியுள்ள வரம்புள்ள மாறல் சார்பெனக் காண்பிக்க.

(3) $f(x)=\frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{2^{n+1}}<x \leq \frac{1}{2^n}$

$=0, \qquad x=0$

என்றால் [0, 1]-ல் f ஆனது வரம்புள்ள மாறல் சார்பு என நிறுவுக.

8. வகையிடல்

(Differentiation)

வகை நுண்கணிதத்திலே (Differential Calculus) நாம் ஏற்கனவே வகையிடல் தத்துவத்தை அறிந்திருப்போம்; அதனை யொட்டிய கணக்குகளைப் பயின்றிருப்போம். ஒரு மாறிச்சார்பின் வகைக்கெழு (Derivative) ஆனது வகையிடல் (Differentiation) என்ற சிறப்பு எல்லைச் செய்முறை(Special limit process)யைப் பற்றியது என்பதையும் அறிவோம்; இல்லாவிடில் இப்போது அறிந்து கொள்வோம். இந்த அத்தியாயத்திலே வகைக்கெழு (Derivative), வகையீட்டுக்கெழு (Differential coefficient), வகையீட்டு நுண்ணெண் (Differential), வகையிடத்தக்கமை (Differentiability), வகைக்கெழு இருத்தமை (Derivability), வகையிடத்தக்க சார்பு (Differentiable function) ஆகியவற்றைப் பார்க்கப் போகிறோம்.

சார்பு f ஆனது இடைவெளி I-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதென்றும், $x_0 \in I$ என்றும் கொள்க.

x இடத்து மற்றொரு சார்பு g-ன் மதிப்பு ஆனது

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ என்க.

I-ல் x_0-ஐத் தவிர மற்றெல்லா f-ன் வரையறை x இடத்து, g-ம் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. $g(x_0)$-க்கு ஒரு மதிப்பு கொடுத்து விட்டால் g-ன் வரையறை அரங்கம் I ஆகிவிடும்.

இப்போது, I என்ற இடைவெளியின் மீது, $x \neq x_0$ என்றால், $x \in I$-க்கு, $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ என்றும், x_0 இடத்து g-க்கு மதிப்பு இருக்கிறதென்றும் கொள்க. இப்போது g-க்கு வரையறை அரங்கம் I என்றால், $\lim_{x \to x} g(x)$ என்னவென்று ~~பார்ப்போம்.~~

8·1. வரை இலக்கணம்—வகைக் கெழு (Derivative)

f ஆனது I என்ற இடைவெளியின் மீது வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதென்றும் x_0 என்பது I-ன் ஒரு புள்ளியென்றும் கொள்க. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ இருக்கிறதென்றால், f-க்கு x_0 இடத்து வகைக்கெழு இருக்கிறது என்போம்.

இந்த எல்லையை $f'(x_0)$ என்று குறியிடுவது வழக்கம்.

இதனையே $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\quad f(x_0)}{h}$ என்றும் எழுதுவதுண்டு.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ க்கு இடக்கை வகைக்கெழு (left hand derivative) என்றும், $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ -க்கு வலக்கை வகைக் கெழு (right hand derivative) என்றும் பெயர். இவற்றை முறையே $Lf'(x_0)$ எனவும், $Rf'(x_0)$ எனவும் குறியிடுவர். $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ இருந்தால், f-க்கு $x=x_0$ இடத்து வகைக்கெழு காணத் தக்கமை உடைத்து (derivable) என்பர்.

$f'(x_0)$ இருக்கவேண்டுமானால்,

(i) $Lf'(x_0)$ இருக்கவேண்டும்.

(ii) $Rf'(x_0)$ இருக்கவேண்டும்.

(iii) $Lf'(x_0)=Rf'(x_0)$

8·2. ஒரு இடைவெளியில் வகைக்கெழு காணத்தக்கமை (Derivability in an Interval)

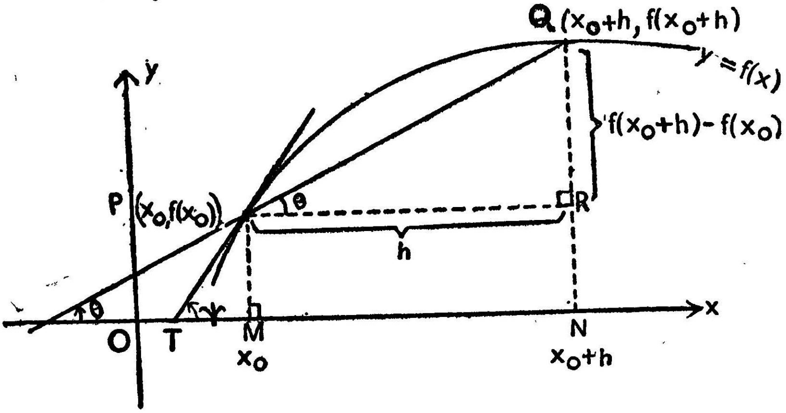
f ஆனது திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதென்க. (a, b)-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்து f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கமை உடைத்தென்றால், (a, b)-ல் f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கமை உடைத்து என்பர்.

அதாவது, (a, b)-ல் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்து f-க்கு ஒரே முறை வகைக்கெழு இருக்கவேண்டும்.

இப்போது, f ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தென்க.

$a<x_0<b$, ஒவ்வொரு x_0-க்கும் $f'(x_0)$ இருக்கிறது என்றும், $Rf'(a)$, $Lf'(b)$-ம் இருக்கின்றன என்றும் இருந்தால்தான் f ஆனது $[a, b]$-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கது ஆகும்.

8·3. வகைக்கெழுவிற்கு வரைபட விளக்கம் (Geometrical Interpretation of the Derivative)



படம் 64

x_0 ஆனது $[a, b]$-ன் உள் ஒரு புள்ளி. $f(x)$தான் படத்தில் காணப்படும் வளைகோடு.

$$OM = x_0,\quad ON = x_0 + h,\quad PM = f(x_0),\quad QN = f(x_0 + h)$$

PQ ஆனது x அச்சுடன் அமைக்கும் கோணம் θ ஆரையன்கள் எனில், $\triangle PQR$-லிருந்து,

$$\tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

வளைகோடு வழியே Q ஆனது P-ஐ நெருங்க, QR-ம் PR-ம் O-ஐ நெருங்குகின்றன. எல்லையில் நாண் QP ஆனது P இடத்து வளைகோட்டுக்கு PT என்ற தொடு கோடாகின்றது.

எல்லையில் θ ஆனது தொடுகோடு x அச்சுடன் அமைக்கும் கோணம் ψ ஆகின்றது.

$$\therefore\ f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{Q\to P} \frac{QR}{PR}$$

$$= \lim_{\theta\to\psi} \tan\theta = \tan\psi$$

$\therefore$ $f^1(x_0)$ என்பது $y=f(x)$ வளைகோட்டில் $x=x_0$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் (Slope) ஆகும்.

8·4. கணக்குகள்

1. $f(x)=x^2$ என்றால் f ஆனது [0, 1]-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கதென நிறுவுக.

வரை இலக்கணத்தில் கண்டவாறு, திறந்த இடைவெளி (0, 1)-ன் யாதாமொரு புள்ளி x_0 இடத்தும், 0 இடத்தும், 1 இடத்தும் f-க்கு வகைக்கெழு இருக்கிறதென்று நிறுவினால் போதும்.

(0, 1)-ன் அகத்துள்ள புள்ளி (Interior point) x_0 என்க.

$$\therefore \quad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

இப்போது,

$$f'(0)=Rf'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}h=\lim_{h\to 0}(0+h)=0$$

$$f'(1)=Lf'(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}2+h$$

$$=\lim_{h\to 0}2-h=2$$

$\therefore$ f ஆனது [0, 1]-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கது.

$x=0$-க்கு, $2x$ ஆனது 0 ஆனதாலும், $x=1$க்கு $2x$ ஆனது 2 ஆவதாலும், $f'(x)=2x$ என்றெழுதலாம்.

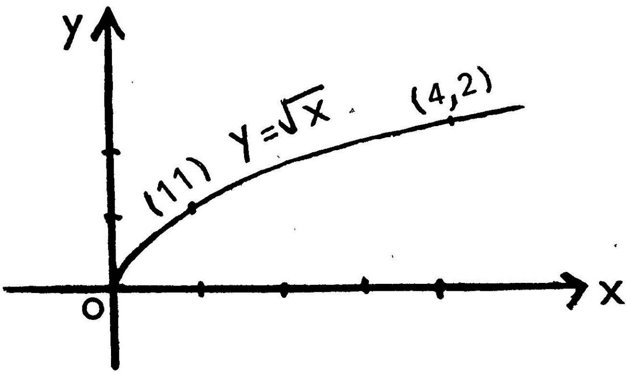
(2) $f(x)=\sqrt{x}$ என்றால், $f'(1)$ என்ன?

வரை இலக்கணப்படி $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h}-1)}{h}\frac{(\sqrt{1+h}+1)}{(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{2}$$

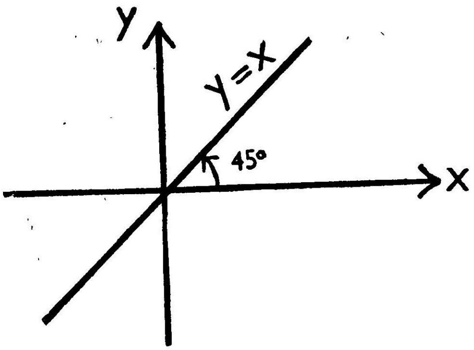


படம் 65

(3) $f(x)=x$ என்றால் ஒவ்வொரு x-க்கும் f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கதென நிறுவுக.

$$f'(x)=\lim_{h\leftarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$



வரைபடத்தில்
$\tan 45° = 1$
$= f'(x)$
என்பதை நோக்குமின்!

படம் 66

(4) $f(x) = 0, \quad x = 0$
$= x, \quad x > 0$
$= -x \quad x < 0$

என்றால் $x=0$ இடத்து f-க்கு வகைக்கெழு இருக்கிறதா என ஆராய்க. f-ன் வரையறை அரங்கம் $(-1, 1)$ என்க.

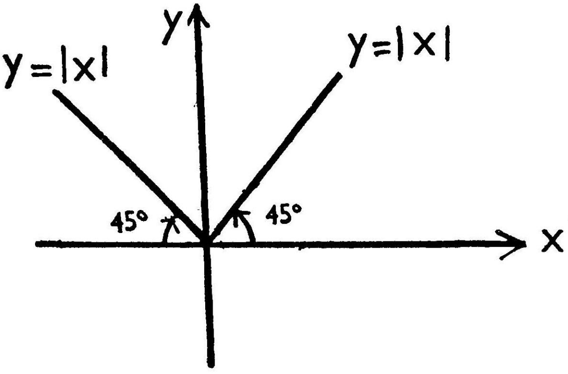
(குறிப்பு: மேலேயுள்ளதை, $f(x) = |x|$ என்றும் எழுதலாமல்லவா ?)

வரை இலக்கணப்படி,

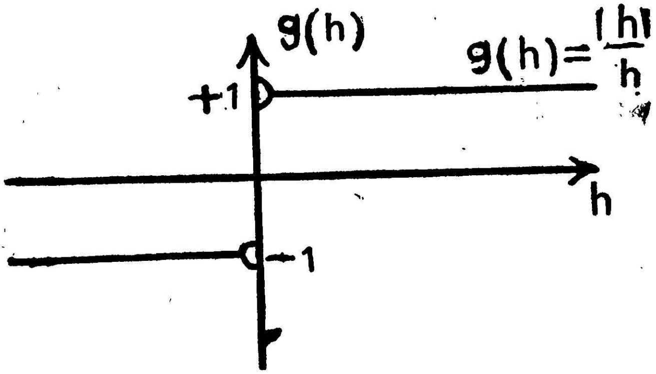
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

$g(h) = \dfrac{|h|}{h}$ என்க.



படம் 67



படம் 68

வரை படத்திலே உள்ளபடி, ஸிக்னம் சார்புக்கு எல்லை இல்லை; $\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ இல்லை. (காண்க: அத்தியாயம் 5. செய்த கணக்குகள்)

$\therefore\ f'(0)$ இல்லை.

மற்றொரு முறை

$$Lf'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to 0}-1=-1.$$

$$Rf'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{n}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

$\therefore\ Lf'(0)\neq Rf'(0)$

$\therefore\ f'(0)$ இல்லை.

நோக்குங்கள்: $x=0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

பிறிதொருவிதம்

M என்பது மெய்யெண் என்க. $\varepsilon=1$ என்றும், $\delta>0$ என்றும் கொள்க. $x_1>0$, $x_2<0$, $|x_1-0|<\delta$, $|x_2-0|<\delta$ என்றவாறு எண்கள் x_1, x_2 என்பவை $(-1, 1)$-ல் இருக்கட்டும்.

$$\left|\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}-M\right| = \left|\frac{|x_1|-|0|}{x_1}-M\right| = |1-M|$$

இப்போது $\left|\frac{f(x_2)-f(0)}{x_2-0}-M\right| = \left|-1-M\right|$

$M\leqq 0$ என்றால், $|1-M|\geqq\varepsilon$

$M>0$ என்றால், $|-1-M|>\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ இல்லை.

(5) f-ன் வரையறை அரங்கம் $[0,1]$ என்க.

$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $0<x\leqq 1$

$f(0)=0$

என்றால் f ஆனது 0 இடத்து வகைக்கெழு காணத்தக்கதா?

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

M ஒரு மெய்யெண் என்க. $g(h)=\sin\frac{1}{h}$, $0<h<1$ என்க.

$M\geqq 0$ என்க. $\varepsilon=1$ என்றும், $\delta>0$ என்றும் கொள்க.

$\frac{1}{N}<\delta$ என்றவாறும் $0<\frac{1}{N}<1$ என்றவாறும் ஒரு நேர் முழு எண் N உள்ளது.

$\frac{2}{(4N+3)\pi}\in(0,1)$ என்பதுடன் $\left|\frac{2}{(4N+3)\pi}-0\right|<\delta$.

$$\left|g\left(\frac{2}{(4N+3)\pi}\right)-M\right| = \left|\sin\frac{(4N+3)\pi}{2}-M\right|$$
$$=|-1-M|>1=\varepsilon.$$

இப்போது,

$M<0$ என்க.

$$\left|\frac{2}{(4N+1)\pi}-0\right|<\delta,\ \frac{2}{(4N+1)\pi}\in(0,1)$$

$$\therefore\left|g\left(\frac{2}{(4N+1)\pi}\right)-M\right|=\left|\sin\frac{(4N+1)\pi}{2}-M\right|$$

$$=|1-M|>1=\varepsilon.$$

$\therefore$ x ஆனது 0-ஐ அணுக, g ஆனது M-ஐ அணுகவில்லை.

$\therefore \lim_{h\to 0} g(h)$ இல்லை. $\therefore \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$ இல்லை.

$\therefore f'(0)$-ம் இல்லை.

(6) f-ன் வரையறை அரங்கம் [0, 1] என்றும்

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leqq 1$$

$$=0,\quad x=0$$

என்றால் $f'(0)$ உண்டா?

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}$$

$\epsilon>0$, $\delta=\varepsilon$ என்க.

$$h\in(0,1), 0<|h-0|<\delta\to\varepsilon=\delta>|h|\geqq\left|h\sin\frac{1}{h}\right|$$

$$=|f(h)-0|$$

$$\to|f(h)-0|<\varepsilon$$

$$\therefore \lim h\sin\frac{1}{h}=0.$$

$$\therefore\ f'(0)=0$$

(7) $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}},\ x\neq 0$

$$=0,\qquad x=0$$

என்றால் $f'(0)$ இருக்கிறதா?

$$Rf'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+e^{1/h}}$$

$$= \frac{1}{1+\lim\limits_{h\to 0} e^{1/h}} = 0 \quad \because \lim_{h\to 0} e^{1/h} = \infty$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{h}, \quad h>0$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\frac{-h}{1+e^{-1/h}} - 0}{-h} \right\} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+e^{-(1/h)}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\because \lim_{h\to 0} e^{-(1/h)} = 0$$

$Rf'(0) \neq Lf'(0)$.

$\therefore$ $f'(0)$ இல்லை.

(8) $f(x) = x, \quad x \in [0, 1]$

$\quad = 2x-1, \quad x \geq 1.$

என்றால் $f'(1)$ என்ன ?

$$h>0, \quad Rf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{2(1+h)-1\}-\{2(1)-1\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h-1}{h} = 2$$

$$h>0, \quad Lf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)-1}{-h} = 1$$

$Rf'(1) \neq Lf'(1)$

$\therefore$ $f'(1)$ இல்லை.

ஆனால், $f(1+h) = 2(1+h) - 1 = 1+2h$

$\quad f(1-h) = 1-h$

$$\therefore \quad f(1+0) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}(1+2h) = 1$$

$$f(1-0) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}(1-h) = 1$$

$\because \; f(1+0) = f(1-0), \quad \therefore \; f$ ஆனது $x=1$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

8·5. தொடர்ச்சியும், வகைக்கெழு இருத்தமையும் (Continuity and Existence of Derivative)

தேற்றம் 1

f என்னும் சார்பு இடைவெளி I-ல் வரையறுக்கப் பட்டுள்ள தென்றும், I-ல் x_0 இடத்து f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கது என்றும் கொண்டால், f ஆனது x_0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

(குறிப்பு : இஃது, வகைக்கெழு காணத்தக்கமைக்கு வேண்டிய நிபந்தனை.)

நிறுவல்

f ஆனது x_0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் இருக்கவேண்டுமானுல், $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ என்று நிறுவினுல் போதும்.

அதாவது, $\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = 0$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

இப்போது, $\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$

f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கதென்பதால், $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ இருக்கிறது. $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$-ம் இருக்கிறது

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right) = \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\left(\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\right)$$

$$= f'(x_0).\;0 = 0.$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

$\therefore$ f ஆனது x_0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

மேற்கண்ட தேற்றத்தை, "ஒரு புள்ளியிடத்து ஒரு சார்புக்கு முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருக்க வேண்டுவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையாவது, அச்சார்பு அப்புள்ளியிடத்துத் தொடர்ச்சி யுள்ளதாயிருத்தல் வேண்டும்" என்றும் எழுதலாம். இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறும் நிறுவலாம் :

$x = x_0$ இடத்து f-க்கு முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருக்கிறதெனக் கொள்க. இதனை α என்க.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \alpha, \quad h > 0.$$

$$\therefore \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| = |\alpha| + \epsilon, \; h \to 0 \to \varepsilon \to 0.$$

$$\therefore \; |f(x_0+h) - f(x_0)| = |h| \, (|\alpha| + \varepsilon)$$

α முடிவுள்ளதென்பதால், $h \to 0$ என்னும்போது,

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \to 0.$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

$\therefore$ f ஆனது $x = x_0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

மிக முக்கியமான குறிப்பு

இந்தத் தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையாகாது. அதாவது, இந்தத் தேற்றத்தின் நிபந்தனையாவது போதியதல்ல. இதனை நிறுவ, சில உதாரணங்களைத் தந்தால் போதும்.

$f(x) = |x|$ என்க. f-ன் வரையறை அரங்கம் $(-1, 1)$ என்க. யாதாமொரு $c \in (-1, 1)$ என்க. $\varepsilon < 0$ என்க. $\delta = \varepsilon$ என்க.

$$x \in (-1, 1), |x - c| < \delta \to \big| f(x) - f(c) \big| = \big| |x| - |c| \big| \leqq |x - c| < \delta = \varepsilon$$

$\therefore$ f ஆனது c இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது. c ஆனது 0 ஆகவும் இருக்கலாம்.

$\therefore$ f ஆனது 0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$Rf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}=1$$

$$Lf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{|-h|-0}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{-h}\right)=-1.$$

$\therefore f'(0)$ இல்லை, ஏனெனில் $Rf'(0)\neq Lf'(0)$

$\therefore x=0$ இடத்து f ஆனது வகைக் கெழு காணத்தக்கதல்ல.

ஆனால் $x=0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

மற்றொரு உதாரணம் : $f(x)=x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$

$=0, \quad x=0$

என்றால், f ஆனது எல்லா x-க்கும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. ஆனால் $x=0$ இடத்து f-க்கு வகைக்கெழு இல்லை.

தேற்றம் 2

$f(x)=$மாறிலி K என்றால் f-ன் வகைக்கெழு பூச்சியமாகும்.

நிறுவல்

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{K-K}{h}=0$$

தேற்றம் 3

$f(x)=x$ என்றால் f-ன் வகைக்கெழு 1 ஆகும்.

நிறுவல்

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

மாதிரிக் கணக்குகள்

(1) $f(x)=+\sqrt{x}, \quad x\geq 0$

$=-\sqrt{|x|}, \quad x<0$

என்றால் $x=0$ இடத்து f-ன் தொடர்ச்சியையும் வகைக்கெழு காணத்தக்கமையையும் ஆராய்க.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{|x|} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

மேலும் $f(0)=0$

$\therefore$ f ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\sqrt{|h|}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \left(\frac{\sqrt{|h|}}{-h}\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{(\sqrt{|h|})^2}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{|h|}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

$$\therefore \ f'(0) = +\infty$$

$\therefore$ f ஆனது $x=0$ இடத்து முடிவற்ற எண்ணை வகைக்கெழு வாகக் கொண்டுள்ளது.

(2) f-ன் வரையறை அரங்கம் $[0, 1]$ என்றும்,

$$f(x) = x, \quad [0, \tfrac{1}{2}]$$
$$= 1-x, \quad (\tfrac{1}{2}, 1]$$

என்றும் கொண்டால், f ஆனது $x=\frac{1}{2}$ இடத்துத் தொடர்ச்சி யாயுள்ளது என்றும், ஆனல் அவ்விடத்து வகைக்கெழு காணத் தக்கதல்ல என்றும் காண்பிக்க.

$$f(\tfrac{1}{2}+h) = 1-(\tfrac{1}{2}+h) = \tfrac{1}{2}-h.$$

$$\therefore \ f(\tfrac{1}{2}+0) = \lim_{h\to 0} f(\tfrac{1}{2}+h) = \lim_{h\to 0} (\tfrac{1}{2}-h) = \tfrac{1}{2}.$$

$$f(\tfrac{1}{2}-h) = \tfrac{1}{2}-h$$

$$\therefore \quad f(\tfrac{1}{2}-h)=\lim_{h\to 0} f(\tfrac{1}{2}-h)=\lim_{h\to 0}(\tfrac{1}{2}-h)=\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad f(\tfrac{1}{2}+0)=f(\tfrac{1}{2}-0)=\tfrac{1}{2}.$$

மேலும், $f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}$

$\therefore$ f அனது $x=\tfrac{1}{2}$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$Lf'(\tfrac{1}{2})=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(\tfrac{1}{2}+h)-f(\tfrac{1}{2})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\tfrac{1}{2}-h)-f(\tfrac{1}{2})}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\tfrac{1}{2}-h)-\tfrac{1}{2}}{-h}=1$$

$$Rf'(\tfrac{1}{2})=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\tfrac{1}{2}+h)-f(\tfrac{1}{2})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\tfrac{1}{2}-h)-\tfrac{1}{2}}{h}=-1$$

$$Lf'(\tfrac{1}{2})\neq Rf'(\tfrac{1}{2})$$

$\therefore$ f ஆனது $x=\tfrac{1}{2}$ இடத்து வகைக்கெழு காணத் தக்கதல்ல.

(3) $f(x)=x,\ 0\leq x<1$

$\qquad =2-x,\ x\geqslant 1$

என்றால் $x=1$ இடத்து f-ன் தொடர்ச்சியையும், வகைக்கெழு காணத் தக்கமையையும் காண்.

$$f(1+0)=\lim_{h\to 0} f(1+h)=\lim_{h\to 0}\{2-(1+h)\}=\lim_{h\to 0} 1-h=1$$

$$f(1-0)=\lim_{h\to 0} f(1-h)=\lim_{h\to 0}\{1-h\}=1$$

$$\therefore f(1+0)=f(1-0)=1$$

$$f(1)=2-1=1$$

$$\therefore f(1+0)=f(1-0)=f(1)$$

$\therefore$ f ஆனது $x=1$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h},\ h>0$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-h-1}{h} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-h-1}{-h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$Lf'(1) \neq Rf'(1)$

$\therefore f'(1)$ இல்லை.

(4) $f(x) = 2+x,\ x \geqq 0$

$\quad = 2-x,\ x<0$

என்றால் $x=0$ இடத்து f-ன் தொடர்ச்சியையும், வகைக்கெழு காணத்தக்கமையையும் ஆராய்க.

$$f(+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{x\to 0} 2+h = 2$$

$$f(-0) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} 2+h = 2$$

$f(+0) = f(-0) = 2$

மேலும் $f(0) = 2+0 = 2$

$\therefore f(+0) = f(-0) = f(0)$

$\therefore f$ ஆனது 0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right],\ h>0$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2}{h} = 1$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(0-h)-f(0)}{h}\right],\ h>0$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{2+h-2}{-h}\right] = -1$$

$Rf'(0) \neq Lf'(0)$

$\therefore f'(0)$ இல்லை.

(5) $f(x) = \dfrac{x\,e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$ என்றால் $x=0$ இடத்து f-ன் தொடர்ச்சியையும் வகைக்கெழு காணத் தக்கமையையும் பற்றி ஆராய்க. $f(0)=0$ என்க.

$$f(+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \frac{h\,e^{1/h}}{1+e^{1/h}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^{-(1/h)+1}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{\left(e^{(1/h)+1}\right)} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$f(-0) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} \frac{-h\,e^{1/-h}}{1+e^{1/-h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} -h\left(\frac{e^{1/h}}{1+e^{1/(1/h)}}\right) = -0.\frac{0}{1+0} = 0$$

$$\therefore f(+0) = f(-0) = f(0)$$

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right],\ h>0$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{h\,e^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0\right]\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{e^{1/h}}{1+e^{1/h}}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+e^{-(1/h)}} = 1$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{h},\quad h>0$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h}\left[\frac{-h\,e^{-(1/h)}}{1+e^{-(1/h)}} - 0\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-(1/h)}}{1+e^{-(1/h)}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$Rf'(0) \neq Lf'(0)$

$\therefore f'(0)$ இல்லை.

(6) f-ன் வரையறை அரங்கம் [0, 1] என்க.

$f(x)=0, \quad [0, \tfrac{1}{2})$

$\quad =1, \quad x=\tfrac{1}{2}$

$\quad =2, \quad (\tfrac{1}{2}, 1]$

என்றால் $x=\tfrac{1}{2}$ இடத்து f-ன் தொடர்ச்சியையும், வகைக்கெழு இருத்தமையையும் ஆராய்க.

$$f(\tfrac{1}{2}+0) = \lim_{x\to a} f(\tfrac{1}{2}+h),\ h>0$$

$$= \lim_{h\to 0} 2 = 2$$

$$f(\tfrac{1}{2}-0) = \lim_{h\to 0} f(\tfrac{1}{2}-h),\ h>0$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f(\tfrac{1}{2}+0) \neq f(\tfrac{1}{2}-0)$$

$\therefore$ $x=\tfrac{1}{2}$ இடத்து f-க்கு முதல்வகை, அல்லது, சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மை உள்ளது.

$$Lf'(\tfrac{1}{2}) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\tfrac{1}{2}-h)-f(\tfrac{1}{2})}{-h}\right],\quad h>0$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{0-1}{-h}\right] = +\infty$$

$$Rf'(\tfrac{1}{2}) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\tfrac{1}{2}+h)-f(\tfrac{1}{2})}{h}\right],\quad h>0$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2-1}{h}\right] = +\infty$$

$$Lf'(\tfrac{1}{2}) = Rf'(\tfrac{1}{2}) = +\infty$$

$$\therefore\ f'(\tfrac{1}{2}) = +\infty$$

(7) $f(x)=\sqrt{x}, \quad x \geqq 0$

$\quad = \sqrt{-x}, \quad x<0$

என்றால் $x=0$ இடத்து f-ன் தொடர்ச்சியையும், வகைக்கெழு காணத் தக்கமையையும் ஆராய்க.

$$f(+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0$$

$$f(-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0$$

மேலும் $f(0)=0$ (கணக்கில் கொடுத்துள்ளபடி)

$\therefore f(+0)=f(-0)=f(0)$

$\therefore f$ ஆனது 0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$Rf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

$$Lf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}-0}{-h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{\sqrt{h}}=-\infty$$

$Rf'(0)\neq Lf'(0)$

$\therefore$ $x=0$ இடத்து f ஆனது வகைக்கெழு காணத் தக்கதல்ல.

(8) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\quad x\neq 0$

$\qquad =0,\qquad x=0$

என்றால் $x=0$ இடத்து f-ன் தொடர்ச்சி, வகைக்கெழு ஆகியவற்றை ஆராய்க.

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0} x\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0} x\cdot\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

$$=0.\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

இப்போது $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq 1$

$\therefore \left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq |x|$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqq \lim_{x\to 0}|x|=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0\cdot 0=0.$$

மேலும் $f(0)=0$, கணக்கில் கொடுத்துள்ளபடி.

$\therefore x=0$ இடத்து fஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$Rf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h},\ h>0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}=0$$

$$Lf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h},\ h>0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2\sin\frac{1}{h}}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}=0$$

$Rf'(0)=Lf'(0)$

$\therefore f'(0)$ இருக்கிறது.

தேற்றம் 3

f என்ற சார்புக்கு $x=x_0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியில்லையானல், அப்புள்ளியிடத்து f-க்கு முடிவுள்ள வகைக்கெழு கிடையாது.

நிறுவல்

$x=x_0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியற்றது என்க.

(1) . . . $\therefore$ $\varepsilon>0$ என்ருல், $\delta>0$, $|h|<\delta\to |f(x_0+h)-f(x_0)|\nless\varepsilon$ ஆனல் $x=x_0$ இடத்து f-க்கு முடிவுள்ள வகைக்கெழு α இருக்க வேண்டுமென்ருல்,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\alpha$$

அதாவது $\lim_{h \to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = \lim_{h \to 0} \alpha h$ என்றாக வேண்டும்.

$=0$ என்றாக வேண்டும்.

அதாவது $| f(x_0+h)-f(x_0) | < \varepsilon, | h | < \delta$ என்றாக வேண்டும். ஆனால் இது (i)-ன்படி சாத்தியமாகாது.

$\therefore$ $x=x_0$ இடத்து f-க்கு வகைக்கெழு இல்லை.

உதாரணம்

$f(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ என்றால் அத்தியாயம் 6-ல், $x=0$ இடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியற்றது எனப் படித்தோம்.

$$Rf'(0)=\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h}-f(0)}{h}$$ இது இல்லை

$$Lf'(0)=\lim_{h \to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{h}-f(0)}{h}$$ இது இல்லை.

$\therefore$ f-க்கு $x=0$ இடத்து வகைக்கெழு இல்லை.

அப்படியே $f(x)=c$, $x=0$ என்றாலும் கூட,

$$Rf'(0)=+\infty, \quad Lf'(0)=-\infty. \quad \therefore Rf'(0) \neq Lf'(0)$$

ஆதலால் இப்போதும், f-க்கு $x=0$ இடத்து வகைக்கெழு இல்லை.

8·6. f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்றும் I-ன் ஒரு புள்ளி x_0 என்றும், $f'(x_0)$ இருக்கிறதென்றும், $f'(x_0)$=முடிவுள்ள எண் α என்றும் கொண்டால், $\epsilon>0$-க்கு

$$0<|x-x_0|<\delta \rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \epsilon$$ என்றவாறு

$\delta>0$ இருக்கிறது என்று கண்டோம்.

இதனையே,

$$\epsilon>0, \delta>0, 0<|h|<\delta \rightarrow \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

என்றும் எழுதலாமெனக் கண்டோம்.

தேற்றம் 1

f-ன் வரையறை அரங்கம் இடைவெளி I என்றும், I-ன் ஒரு புள்ளி x_0 என்றும் கொண்டால், x_0 இடத்து f-க்கு வகைக்கெழு இருக்க வேண்டுவதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனையாவது, ஒவ்வொரு $\epsilon>0$-க்கு, $\left|\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}-\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}\right|<\epsilon$ என்றவாறு $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ அண்மையில் x', x'' என்ற இரு புள்ளிகள் இருக்கவேண்டும்.

(குறிப்பு: இது வகைக்கெழு இருத்தமைக்கு "வேண்டிய போதிய" நிபந்தனையாகும்.)

நிறுவல்

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ என்க.}$$

$$\text{அப்போது } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} g(x)$$

அத்தியாயம் 5-ல் எல்லை இருப்பதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனைத் தேற்றத்தைப் படித்தோம். அதன்படி, $\epsilon>0$-க்கு,

$|g(x')-g(x'')|<\epsilon$ என்றவாறு புள்ளிகள் x', x'' என்பவை $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ ல் இருக்கவேண்டும். (இதனை இங்கே நிறுவுக!)

$$\text{அதாவது } \left|\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}-\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}\right|<\varepsilon$$

என்றவாறு $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$-ல் புள்ளிகள் x', x'' இருக்கவேண்டும்.

தேற்றம் 2

f-ன் வரையறை அரங்கம், I இடைவெளி என்றும், I-ன் ஒரு புள்ளி x_0 என்றும், f-க்கு x_0 இடத்து முடிவுள்ள வகைக்கெழு உள்ளதென்றும் கொண்டால், $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ அண்மையில் எந்த x-க்கும் $|f(x)-f(x_0)|<M|x-x_0|$ என்றவாறு நேர் எண் M இருக்கிறது.

நிறுவல்

$x=x_0$ இடத்து f-க்கு முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருப்பதால், $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ அண்மையில் எந்த x-க்கும் ஒவ்வொரு $\epsilon>0$-க்கு

$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right| < \varepsilon$ என்பது உண்மையாகும்.

$\epsilon=1$ என்க.

$$\left|\,\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| - |f'(x_0)|\,\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < 1$$

அதாவது,

$$|f'(x_0)|-1 < \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| < |f'(x_0)|+1$$

$$\therefore \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| < 1+|f'(x_0)|$$

அதாவது,

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} < 1+|f'(x_0)|$$

$$\therefore \quad |f(x)-f(x_0)| < [1+|f'(x_0)|]\ |x-x_0|$$

$1+|f'(x_0)|=M$ என்றால்

$|f(x)-f(x_0)| < M|, x-x_0, \ x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

குறிப்பு

(1) $|f(x)-f(x_0)| < M|x-x_0|$-க்கு லிப்ஷிட்ஸ் (Lipschitz) நிபந்தனை என்று பெயர்.

(2) $|f(x)-f(x_0)| < M|x-x_0|$ என்றாலே f ஆனது $x=x_0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. எப்படியெனில்,

$|x-x_0|\ \frac{\varepsilon}{M}=\delta>0$ என்றால்

$|f(x)-f(x_0)| < M.\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$

$\therefore$ x_0 இடத்து, f-ன் தொடர்ச்சிக்கான நிபந்தனை நிறைவேற்றப்பட்டது.

தேற்றம் 3

f-ன் வரையறை அரங்கம் இடைவெளி I என்றும், x_0 என்பது I-ன் ஒரு புள்ளியென்றும், x_0 இடத்து f-க்கு முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருக்கிறதென்றும் கொண்டால்,

$$\therefore \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)+\eta, \quad \lim_{h\to 0} \eta = h$$

$0<|h|<\delta$ என்றவாறு மெய்யெண் $\delta>0$ இருக்கிறது.

நிறுவல்

f-க்கு $x=x_0$ இடத்து முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருப்பதால்,

$$0<|h|<\delta \to \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ என்று வைத்துக் கொண்டால்

$$0<|h|<\delta \to |g(x_0+h)-f'(x_0)|<\varepsilon$$

$$\therefore -\varepsilon<g(x_0+h)-f'(x_0)<\varepsilon.$$

அதாவது

$$-\varepsilon<\eta<\epsilon, \quad g(x_0+h)-f'(x_0)=\eta$$

$$\therefore g(x_0+h)=f'(x_0)+\eta, \quad 0<|h|<\delta$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} g(x_0+h) = \lim_{h\to 0}(f'(x_0)+\eta)$$

(1) $\qquad = f'(x_0)+\lim_{h\to 0}\eta \quad \because f'(x_0)$ ஆனது முடிவுள்ளது.

ஆனல், $g(x_0+h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$\therefore \lim_{h\to 0} g(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$= f'(x_0)$$

$\therefore$ (1)-லிருந்து; $f'(x_0)=f'(x_0)+\lim_{h\to 0}\eta$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\eta=0.$$

கிளைத்தேற்றம்

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)+\eta, \quad \lim_{h\to 0}\eta=0, \; 0<|h|<\delta$$

என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்ட சார்பு ஆனது $x=x_0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது எனக் காண்பிக்கலாம். எப்படியெனில்,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\,[f'(x_0)+\eta]$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=\lim_{h\to 0}[hf'(x_0)+h\eta]=0$$

$h\to 0$ என்றால் $|h|<\delta$

$\therefore\ |h|<\delta\to\ |f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon>0\quad \therefore f$ ஆனது x_0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

தேற்றம் 4

சார்புகள் f, g என்பவை இடைவெளி I-ன் மீது வரையறுக்கப் பட்டுள்ளன என்றும், I-ன் ஒரு புள்ளி x_0 இடத்து அவற்றுக்கு வகைக்கெழுக்கள் உண்டென்றும், k என்பது ஒரு மெய்யெண் என்றும் கொண்டால், $f+g, f-g, fg, kf$ என்பவையும் x_0 இடத்து வகைக்கெழு காணத்தக்கவையே. மேலும்,

(i) $(f+g)'\,(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

(ii) $(f-g)'\,(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$

(iii) $(fg)'\,(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$

(iv) $(kf)'\,(x_0)=k[f'(x_0)]$

(v) I-ன் ஒவ்வொரு x இடத்தும் $g(x)\neq 0$ என்றால், $\frac{f}{g}$ ஆனது x_0 இடத்து வகைக்கெழு காணத்தக்கது. மேலும்

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

நிறுவல்

(i) $$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]+[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$= f'(x_0) + g'(x_0)$ $\because$ $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ இருக்கின்றன.

$\therefore$ $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $$\lim_{x \to x_0} \frac{(f-g)(x) - (f-g)x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x) - f(x_0) + g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)] - [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] - \lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]$$

$= f'(x_0) - g'(x_0)$ $\because$ $f'(x_0)$ $g'(x_0)$ இருக்கின்றன.

$\therefore$ $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

(iii) $$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \left\{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right\} + g(x_0) \left\{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right\} \right]$$

f ஆனது x_0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால் (ஏனெனில், x_0 இடத்து f-க்கு வகைக்கெழு இருக்கிறது),

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

மேலும் $$\lim_{x \to x_0} g(x_0) = g(x_0)$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} \left\{ f(x) \left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] + g(x_0) \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]\right\}$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) \left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] + \lim_{x \to x_0} g(x_0) \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] + \lim_{x \to x_0} g(x_0) \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0) f'(x_0)$$

$$\therefore (fg)'(x_0) = f(x_0)\, g'(x_0) + g(x_0) f'(x_0).$$

(iv) $$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{(kf)(x)-(kf)(x_0)}{x-x_0}\right] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{k(f(x))-k(f(x_0))}{x-x^0}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{k(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\right]$$

$$= k \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = k f'(x_0)$$

$$\therefore (kf)'(x_0) = kf'(x_0)$$

(v) $\forall x \in I,\quad g(x) \neq 0$ என்றால்

$$\lim_{x \to x_0} \left\{\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}\right\}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left\{\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}\right\} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(x_0) f(x) - f(x_0) g(x)}{(x-x_0)\, g(x) g(x_0)}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(x_0) f(x) - g(x_0) f(x_0) + g(x_0) f(x_0) - f(x_0) g(x)}{(x-x_0)\, g(x)\, g(x_0)}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left\{\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[g(x_0)\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) - f(x_0)\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\right]\right\}$$

ஆனால் g-க்கு x_0 இடத்து வகைக்கெழு இருப்பதால்,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)\, g(x_0)}, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

இருக்கின்றன.

$$\therefore \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{1}{g(x)\, g(x_0)} \left[g(x_0) \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) - f(x_0) \left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right) \right] \right\}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{g(x)\, g(x_0)} \right] \left\{ g(x_0) \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right] - f(x) \lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{g(x_0)\;\; g(x_0)} [g(x_0)\, f'(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)]$$

$$= \frac{1}{[g(x_0)]^2} [g(x_0)\, f'(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)]$$

$$= \left(\frac{f}{g} \right)' (x_0).$$

8·7. சில சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காணல்

(1) $f(x) = x^n$, n ஒரு நேர் முழுவெண் என்றால் $f'(x)$-ஐக் காண்.

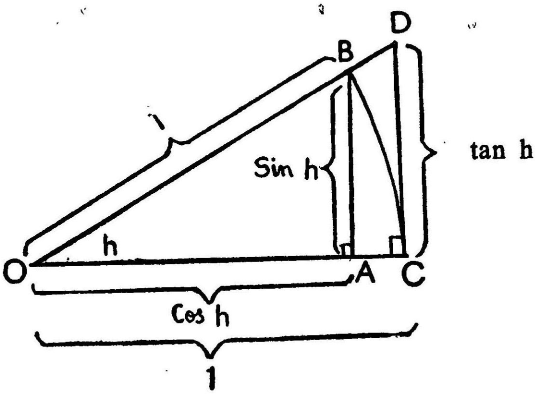
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{x^n + n\, x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \right\}$$

(ஈருறுப்பு வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி)

$$\therefore\; f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h + n(n-1)(n-2) x^{n-3} \; 3 \; + \ldots h^{n-1} \right]$$

(2) $f(x)=\sin x$ என்றால் எந்த x-க்கும் $f'(x)$-ஐக் காண்.



படம் 69

முதலில் $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$-ஐக் காணலாம். ($h$ ஆரையன்கள்)

$$\frac{\sin h}{h}=\frac{\sin(-h)}{-h}, \quad h>0$$

BC ஆனது 0-ஐ மையமாக வைத்து 1-ஐ ஆரமாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட வட்டவில். $\angle AOB=h$ஆரையன்கள்.

$\triangle$ OAB-ன் பரப்பு$=\frac{\sin h \cos h}{2}$

ஆரைச்சிறை (Sector) OCB-ன் பரப்பு$=\frac{h}{2\pi}\cdot\pi=\frac{h}{2}$

$\triangle$ OCD-ன் பரப்பு$=\frac{\tan h}{2}$

$$\therefore \frac{(\sin h)(\cos h)}{2}\leq\frac{h}{2}\leq\frac{\tan h}{2}$$

$\frac{\sin h}{2}$-ஆல் வகுக்க,

$$\cos h \leq \frac{h}{\sin h} \leq \frac{1}{\cos h}$$

$\lim_{h\to 0} \cos h=\lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos h}=1$ என்பதால், $\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sin h}=1$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

இப்போது $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{-\sin h}{\cos h + 1}$$

$$= (1)\,(0) = 0$$

இப்போது,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(\sin x)\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + (\cos x)\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]$$

$$= \sin x,\ 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

(3) $f(x) = \tan^{-1} x$ என்றால் $f'(x)$ என்ன?

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{\tan^{-1}\left\{\frac{(x+h-x)}{1+(x+h)x}\right\}}{h}\right\}$$

$$\lim_{h\to 0} \left\{\frac{\tan^{-1} \frac{h}{1+x\,(x+h)}}{h}\right\}$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{1+x\,(x+h)}\right]\left[\frac{1+x\,(x+h)}{h}\tan^{-1}\frac{h}{1+x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{1+x(x+h)}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{h}{1+x\,(x+h)}\right)}{\left(\frac{h}{1+x(x+h)}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\cdot\lim_{v\to 0}\frac{\tan^{-1}v}{v},\quad v=\frac{h}{1+x(x+h)}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\,(1)=\frac{1}{1+x^2}.$$

[குறிப்பு $x\neq 0$ என்றால், $|\tan^{-1}x| < \dfrac{2\,|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\tan^{-1}x=0.$$

மேலும், $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}\,(1+\sqrt{1+x^2})} < \dfrac{\tan^{-1}x}{x} < \dfrac{2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1.]$$

(4) $f(x)=e^x$ என்றால் $f'(x)$ என்ன ?

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$

$$=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\; e^x.1=e^x$$

குறிப்பு: $e^h-1=k$ என்றால், $h=\log(1+k)$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log(1+k)}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\log(1+k)^{1/k}}$$

$$=\frac{1}{\log\lim_{k\to 0}(1+k)^{1/k}}=\frac{1}{\log e}=1$$

8·8. சங்கிலி விதி (Chain Rule)

f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்ற இடைவெளி என்றும், I-ன் ஒரு புள்ளி x_0 இடத்து f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்க தென்றும், f-ன் வீச்செல்லை இடைவெளி J-ல் அடங்கியுள்ள தென்றும், J ஆனது g-ன் வரையறை அரங்கமென்றும் கொள்க. $f(x_0)$ இடத்து g ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கதென்க. h என்ற ஒரு சார்பை அதன் வரையறை அரங்கம் I என்றவாறும், I-ன் யாதாமொரு புள்ளி x இடத்து h-ன் மதிப்பை, $h(x)=g(f(x))$ என்றவாறும் வரையறுக்க. அதாவது $h=g*f$, h ஆனது g, f-ன் சேர்க்கைச் சார்பு. அப்படியானால் h ஆனது x_0 இடத்து வகைக் கெழு காணத்தக்கது என்றும்,

$$h'(x_0)=(g*f)'(x_0)=g'(f(x)f'(x_0)$$ என்றும் நிறுவுக.

நிறுவல்

$f(x_0)=y_0$ என்க.

J-ஐ வரையறை அரங்கமாக்க் கொண்ட சார்பு k-ஐ k-ன் மதிப்பு J-ன் ஒரு புள்ளி y இடத்து, $y\neq y_0 \rightarrow k(y)=\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-g'(y_0)$ என்றவாறும், $k(y_0)=0$ என்றவாறும் வரையறுக்க.

g ஆனது $y_0=f(x_0)$ இடத்து வகைக்கெழு, காணத்தக்கதென் பதால், g-க்கு y_0 இடத்து வகைக்கெழு, $g'(y_0)$ இருக்கிறது.

$$\therefore \lim_{y\rightarrow y_0} k(y)=\lim_{y\rightarrow y_0}\left[\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-g'(y_0)\right]=0.$$

ஆனால் $k(y_0)=0$

$$\therefore \lim_{y\rightarrow y_0} k(y)=k(y_0)$$

$\therefore$ k ஆனது y_0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$k*f$ ஆனது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது; k ஆனது $y_0\in J$ இடத்துத் தொடர்ச்சியுள்ளது; f ஆனது I-ன் x_0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$\therefore$ அத்தியாயம் 6-ல் 6.4 தேற்றம் 3-ன்படி $k*f$ ஆனது x_0 இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$\therefore \lim_{x\rightarrow x_0} k[f(x)]=\lim_{x\rightarrow x_0}(k*f)(x)=(k*f)(x_0)=k[f(x_0)]$$
$$=k(y_0)=0$$

$x \in I$ என்றால்,

$$k(f(x)) = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} - g'(f(x_0)),\ f(x) \neq f(x_0)$$

$$\therefore g(f(x)(-g)f(x_0)) = [k(f(x)) + g'(f(x_0))]\ [f(x) - f(x_0)]$$

இந்த சமன்பாடு, $f(x) = f(x_0)$-க்கும் உண்மையென்பதால், I ன் எல்லா x-க்கும் இச்சமன்பாடு உண்மையாகும்.

$$\therefore \lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}\right] = \lim_{x \to x_0} \left[k(f(x) + g'(f(x_0))\right] \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} [k(f(x)) + g'(f(x_0))] \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

$$\therefore\ h'(x_0) = (g * f)'\,(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

8·9. வகையீடுகள் (Differentials)

x என்ற புள்ளியிடத்து f-க்கு முடிவுள்ள வகைக்கெழு $f'(x)$ இருக்கிறது என்க. x-ஐ மாறவிடுக. x-ன் மாறலை Δx எனக் குறியிடுக. "மாறல்" என்றால் அது நேர் ஆகவும் இருக்கலாம்; குறையாகவும் இருக்கலாம். அதாவது x ஆனது அதிகமாகலாம்; குறையலாம். x ஆனது $x + \Delta x$ என்றாகும்போது $f(x)$ ஆனது $f(x + \Delta x)$ என்றாகட்டும். இப்போது Δx மாறலுக்கு ஒத்த $f(x)$-ல் மாறலை $\Delta f(x)$ என்க. அதாவது,

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ என்க.}$$

$f(x)$-ஐ y என்றால், $\Delta f(x)$-ஐ Δy என்று குறியிடுக.

$$\therefore \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

8·6 தேற்றம் 3-ன்படி,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x + \eta \Delta x,\ \lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0,$$

$$0 < |\Delta x|\ \delta.$$

$$\therefore\ \Delta y = f'(x)\ \Delta x + \eta \Delta x,\ \lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0,\ 0 < |\Delta x| < \delta$$

∴ f ஆனது x இடத்து முடிவுள்ள வகைக்கெழு உடைத்தாயின், $f'(x)\,\Delta x$-ஐப் புள்ளி x இடத்து f-ன் வகையீடு என்பர்; இதனை $df(x)$ என்றும் குறியிடுவர்.

$df(x)=f'(x)\,\Delta x$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

வரை இலக்கணம் : வகையிடத்தக்கமை (Differentiability)

f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்ற இடைவெளி என்றும், $x \in I$ என்றும் கொள்க. A என்பது Δx-ஐச் சாராத எண் என்க. x-ன் அண்மையில் ஒவ்வொரு புள்ளி $x+\Delta x$-க்கும் $f(x+\Delta x)$ ஆனது,

$f(x+\Delta x)=f(x)+A\cdot\Delta x+\eta.\Delta x,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\eta=0$ என்றவாறு

எழுதத்தக்கதெனில் f ஆனது I-ன் x இடத்து வகையிடத்தக்கது (Differentiable) என்போம்.

தேற்றம்

வகையிடத் தக்கமைக்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை (Necessary and Sufficient Condition for Differentiability)

f ஆனது ஒரு புள்ளியிடத்து வகையிடத் தக்கமைக்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனையாவது, அப்புள்ளியிடத்து f-க்கு முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருக்கவேண்டும் என்பதே.

அதாவது "வகையிடத் தக்கமை ↔ வகைக்கெழு காணத் தக்கமை".

நிறுவல்

பாகம் I—வேண்டியது :

h என்ற புள்ளியிடத்து f ஆனது வகையிடத் தக்கது என்க.

∴ $f(x+\Delta x)=f(x)+A\cdot\Delta x+\eta\cdot\Delta x$, A ஆனது Δx-ஐச் சாராதது, $\lim_{\Delta x\to 0}\eta=0$.

$$\therefore\ f(x+\Delta x)-f(x)=A\cdot\Delta x+\eta\cdot\Delta x$$
$$=(A+\eta)\Delta x$$

அதாவது, $A+\eta=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}A+\eta=A+\lim_{\Delta x\to 0}\eta$$

$=A+0$ ∵ $\begin{cases}A \text{ ஆனது } \Delta x\text{-ஐச் சாராதது}\\ \Delta x\to 0\to\eta\to 0.\end{cases}$

$\therefore \quad f'(x) = A$

$\therefore \quad f$-க்கு x இடத்து A என்ற முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருக்கிறது.

பாகம் 2—போதியது.

f-க்கு x இடத்து $f'(x)$ என்ற முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருக்கிறது என்க.

$$\therefore \quad f(x+\triangle x) = f(x) + f'(x)\cdot\triangle x + \eta\cdot\triangle x,$$

$$\lim_{\triangle x\to 0} \eta = 0, \quad 0 < |\triangle x| < \delta.$$

$f'(x)$-க்குப் பதிலாக A என்று எழுதினால்,

$f(x+\triangle x) = f(x) + f'(x)\cdot\triangle x + \eta\triangle x$, $\quad A$ ஆனது $\triangle x$-ஐச் சாராதது, $\lim\limits_{\triangle x\to 0} \eta = 0$.

$\therefore f$ ஆனது x இடத்து வகையிடத்தக்கது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. x இடத்து f-ன் முடிவுள்ள வகைக்கெழு $f'(x)$ ஆனது $df(x)$, dx என்ற வகையீடுகளின் விகிதமெனக் காண்பிக்க.

(i) ... . $df(x) = f'(x)\cdot\triangle x$.

$$f(x) = x \text{ என்றால் } f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1$$

$$= 1$$

$\therefore dx = 1\cdot\triangle x$

$\therefore$ (i)-ஐ

$$df(x) = f'(x)\, dx \text{ என்றெழுதலாம்.}$$

அதாவது $\quad \dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$

இதனால்தான் $f'(x)$-ஐ, "x-ஐப் பொறுத்த, x இடத்து f-ன் வகையீட்டுக்கெழு" (differential co-efficient of f at x with respect to x) என்பர்.

2. $y = f(x)$ என்றால், $\triangle y \neq dy$ என்றும், $\lim\limits_{\triangle x\to 0} \dfrac{\triangle y}{dy} = 1$ என்றும் நிறுவுக. ($f'(\alpha) \neq 0$ என்க)

ஏற்கனவேயே, $\Delta y = f'(x)\Delta x + \eta\ \Delta x$, என்று பார்த்தோம்.

மேற்கண்ட கணக்கு (1)-ன் படி, $dy = f'(x)\ \Delta x$, $f'(x) \neq 0$ என்க.

$$\therefore\quad \Delta y = dy = \eta\ \Delta x$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \eta\ \frac{\Delta x}{dy}$$

$$= 1 + \frac{\eta}{f'(x)} \quad \because f'(x) \neq 0,\ dy = f'(x)\ \Delta x$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{dy} \neq 1, \quad \because \eta \neq 0.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\eta}{f'(x)}\right)$$

$$= 1 + 0 \quad \because \lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0,\quad f'(x) \neq 0$$

$$= 1$$

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ என நிறுவுக.

$$\Delta y = f'(x)\ \Delta x + \eta\ \Delta x$$

$$\therefore\ \frac{\Delta v}{\Delta x} = f'(x) + \eta$$

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + 0 \quad \because \lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0$$

கணக்கு (1)-ல் $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ எனக் கண்டோம்.

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

4. வகையிடத் தக்கமைக்கும், வகைக்கெழு காணத் தக்கமைக்கும் உள்ள வேறுபாடு என்ன?

f-ன் வகைக்கெழு காணத் தக்கமை என்றால் f=க்கு முடிவுள்ளதாகவோ முடிவற்றதாகவோ உள்ள வகைக்கெழு இருக்கும்

தன்மையாகும். $x = x_0$ இடத்து f-க்கு முடிவுள்ள அல்லது முடிவில் லாத மதிப்புள்ள வகைக்கெழு இருந்தால், $x = x_0$ இடத்து f ஆனது வகைக்கெழு காணத் தக்கது என்று பொருள்.

ஒரு இடைவெளியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்து f-க்கு முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத வகைக்கெழு இருக்குமாயின், f ஆனது அவ்விடை வெளியின்மீது வகைக்கெழு காணத் தக்கதென்போம்.

f-க்கு வகையீடு இருத்தல் பண்புக்கு f-ன் வகையிடத் தக்கமை என்று பொருள். $x = x_0$ என்ற புள்ளியிடத்து f-க்கு வகையீடு இருக்குமாயின், அப்புள்ளியிடத்து f ஆனது வகையிடத் தக்கது என்போம். ஒரு இடைவெளியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்தும் f-க்கு வகையீடு உண்டென்றால், அவ்விடைவெளியின்மீது f ஆனது வகையிடத் தக்கதாகும்.

ஒருமாறிச் சார்புக்கு, வகைக்கெழு காணத் தக்கமை யென்றால், முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத வகைக்கெழு இருத்தமை யென்றும், வகையிடைத் தக்கமை என்றால் முடிவுள்ள வகைக்கெழு இருத்தமை யென்றும் கொள்ள வேண்டும்.

8·10. ஏறும், இறங்கும் சார்புகள்

ஏற்கனவேயே, ஒரு புள்ளியிடத்து ஏறும், இறங்கும் சார்புகளைப் படித்திருக்கிறோம். அதனை இங்கே நினைவு கூறுகிறோம்; அத்துடன் ஒரு தேற்றத்தையும் நிறுவுவோம்.

f-ன் வரையறை அரங்கமான $a \leqq x \leqq b$-னுள் ஒரு புள்ளி x_0 என்க.

$h\,[f(x_0+h) - f(x_0)] > 0$, $0 < |h| < \delta$ என்றவாறு $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ என்ற அண்மை இருப்பின் f ஆனது x_0 இடத்து ஏறுகின்றது என்றும்.

$h\,[f(x_0+h) f - (x_0) < 0$, $0 < |h| < \delta$ என்றவாறு $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ என்ற அண்மை இருப்பின் f ஆனது x_0 இடத்து இறங்குகின்றது என்றும் சொல்லுவோம்.

$\therefore$ f ஆனது $x = x_0$ இடத்து ஏறுகின்றது என்றால்,

$$f(x_0+h) > f(x_0),\ h > 0.$$

$$f(x_0+h) < f(x_0),\ h < 0$$

என்று நமக்குத் தெரியும்.

அதுபோல் f ஆனது $x=x_0$ இடத்து இறங்குகின்றது என்றால்,

$$f(x_0+h)<f(x_0),\ h>0$$

$$f(x_0+h)>f(x_0),\ h<0$$

என்றும் நமக்குத் தெரியும்.

தேற்றம்

f-ன் வரையறை அரங்கம் I என்ற இடைவெளி என்றும், $x_0 \in I$ என்றும் கொண்டால், $f'(x_0)$ இருக்கிறதென்றால், $f'(x_0)$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள எண்ணாகவோ, $+\infty$ ஆகவோ, $-\infty$ ஆகவோ இருந்தால்,

$f'(x_0)>0$ என்றால் f ஆனது x_0 இடத்து ஏறுகிறது.

$f'(x_0)<0$ என்றால் f ஆனது x_0 இடத்து இறங்குகிறது.

நிறுவல்

$f'(x_0)$ இருக்கிறது என்றும், $f'(x_0)=$ ஒரு முடிவுள்ள நேர் எண் என்றும் கொள்க.

$f'(x_0)>\epsilon>0$ என்றவாறு $\varepsilon>0$ எடுத்துக் கொள்க. வகைக்கெழுவின் வரை இலக்கணத்திலிருந்து,

$$\left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon,\ 0<|h|<\delta$$

$$\therefore\ f'(x_0)-\varepsilon<\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<f'(x_0)+\varepsilon,\quad 0<|h|<\delta.$$

$$\because\ f'(x_0)-\varepsilon>0,\quad \therefore \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0$$

$$\therefore\ \frac{h\,[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h^2}>0$$

$$\therefore\ h[f(x_0+h)-f(x_0)]>0,\quad 0<|h|<\delta.$$

$\therefore$ f ஆனது $x=x_0$ இடத்து ஏறுகிறது.

இப்போது, $f'(x_0)=+\infty$ என்க. $\therefore$ ஒவ்வொரு நேர் எண் M-க்கும்; $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>M$, $0<|h|<\delta$ என்றவாறு δ-ஐக் காணலாம்.

$$\therefore \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0.$$

$$\therefore \quad h[f(x_0+h)-f(x_0)]>0, \quad 0<|h|<\delta.$$

$\therefore$ f ஆனது $x=x_0$ இடத்து ஏறுகிறது.

இப்போது $f'(x_0)=-\infty$ என்க. $\therefore$ ஒவ்வொரு நேர் எண் L-க்கும், $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<-L$, $0<|h|<\delta$ என்றவாறு δ-ஐக் காணலாம்.

$$\therefore \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<0$$

$$\therefore \quad \frac{h[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h^2}<0.$$

$$\therefore \quad h[f(x_0+h)-f(x_0)]<0, \quad 0<|h|<\delta$$

$\therefore$ f ஆனது $x=x_0$ இடத்து இறங்குகிறது.

8.11. வகையீட்டு நுண்கணிதத்தின் இடைமதிப்புத் தேற்றங்கள் (Mean Value Theorems of Differential Calculus)

தேற்றம் I—ரோல்ஸ் தேற்றம் (Rolle's Theorem)

மூடிய இடைவெளி $a\leq x\leq b$-ஐ வரையறை அரங்கமாகக் கொண்ட f என்ற சார்பானது

(i) f ஆனது $[a, b]$-ன் மீது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது

(ii) $f'(x)$ ஆனது திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் ஒவ்வொரு புள்ளி x இடத்து இருக்கிறது.

(iii) $f(a)=f(b)$

என்ற மூன்று நிபந்தனைகளையும் நிறைவேற்றுமானல், $f'(\xi)=0$ என்றவாறு திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் குறைந்த பட்சம் ξ என்ற ஒரு புள்ளியாவது இருக்கிறது

நிறுவல்

(i)-ன் படி, f ஆனது (a, b)-ன் மீது தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால், f ஆனது வரம்புள்ளது; $[a, b]$-ல் ஒரு தடவையாவது f ஆனது தன் வரம்புகளை அடைகிறது. f-ன் l.u.b. ஆனது M என்றும், g.l.b. ஆனது G என்றும் கொள்க.

$\therefore$ $M\geq G$.

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி 1 : M = G என்க.

$\therefore f(a)=f(x)=f(b)=M=G.$

அதாவது f ஆனது $[a, b]$-ன் மீதான மாறிலிச் சார்பு.

$\therefore$ (a, b)-ன் எந்த புள்ளி ξ இடத்தும் $f'(\xi)=0.$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி 2 M > G என்க.

முனைப் புள்ளிகள் a, b-ஐத் தவிர, (a, b)-ல் ξ என்ற புள்ளியிடத்து f ஆனது M-ஐ அடைந்ததென்க.

அதாவது, $f(\xi)=M$ என்க.

l.u.b-ன் வரை இலக்கணப்படி

$f(\xi+h)\leq f(\xi)=M.,\ \xi+h\in(a, b),\ h\gtrless 0.$

$h>0$ என்க.

$$\therefore \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leq 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0_+}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leq 0$$

(1) $\therefore Rf'(\xi)\leq 0$

$h<0$ என்க. அதாவது $h=-K,\ K>0$ என்க.

$$\therefore \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}=\frac{f(\xi-K)-f(\xi)}{-K}\geq 0 \because f(\xi-K)\leq f(\xi)$$

$$\therefore \lim_{K\to 0}\frac{f(\xi-K)-f(\xi)}{-K}\geq 0$$

(2) அதாவது $Lf'(\xi)\geq 0$

தேற்றத்தின் நிபந்தனை (ii)-ன்படி, $\xi\in(a, b)\to f'(\xi)$ இருக்கிறது

$\therefore Lf'(\xi)=Rf'(\xi)$. என்றிருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ (1)-ம் (2)-ம் சாத்தியமாக, $Lf'(\xi)=0=Rf'(\xi)$

$\therefore f'(\xi)=0$

இதுபோல் $f(\xi)=G$ என்றாலும், $f'(\xi)=0$ என நிறுவலாம்.

குறிப்புகள்

(1) வரைபட விளக்கமாவது, தேற்றத்தில் கொடுத்த நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு, (முனைப் புள்ளியற்ற) (a, b)-ல் குறைந்தபட்

சம் ஒரு புள்ளி ξ என்றால், f-ன் வரைபடத்தில் $(\xi, f(\xi))$ என்ற புள்ளியிடை x அச்சுக்கு இணையாகத் தொடுகோடு இருக்கும்

(2) $f(a)=0=f(b)$ என்றாலும் ரோல்ஸ் தேற்றம் உண்மையே. இது சமன்பாடுகளைப் பற்றிய இயலில் பயன்படுகிறது. எப்படி யெனில், $f(x)=0$ என்பது பல்லுறுப்புச் சமன்பாடு என்றால், இச் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களுக்கிடையே $f'(x)=0$-ன் குறைந்த பட்சம் ஒரு மூலமாவது இருக்கும்.

தேற்றம் 2

லாக்ராஞ்சியின் முதல் இடைத்தேற்றம் (First Mean Value Theorem of Lagrange)

மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f ஆனது

(i) f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது

(ii) $f'(x)$ ஆனது திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் ஒவ்வொரு புள்ளி x இடத்து இருக்கிறது என்ற இரு நிபந்தனை களுக்குட்பட்டால்,

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$ என்றவாறு குறைந்த பட்சம் ஒரு புள்ளி ξ ஆனது திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் இருக்கிறது.

நிறுவல்

$[a, b]$-ஐ வரையறை அரங்கமாகக் கொண்ட சார்பு g என்றால்,

$$g(x)=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

என்பது $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு x இடத்தும் g-ன் மதிப்பு என்க. $f(b)$ என்பது மாறிலி எண்ணாதலின் அது தொடர்ச்சியுள்ளதெனலாம். f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளதெனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $b-x$ ஆனது ஓரடுக்குப் பல்லுறுப்பு ஆதலின் $\psi(x)=b-x$ என்றால் ψ ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளது. தொடர்ச்சியுள்ள சார்பை ஒரு மாறிலியால் பெருக்கினால், கிடைப்பதும் தொடர்ச்சியுள்ள சார் பாதலின் $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\psi$-ம் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பே.

தொடர்ச்சியுள்ள சார்புகளின் கூட்டுத் தொகையும் தொடர்ச்சி யுள்ள சார்பாதலின் g ஆனது $[a, b]$-ன் மீது தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு ஆகும்.

∴ g ஆனது ரோல்ஸ் தேற்றத்தின் முதல் நிபந்தனையை நிறைவேற்றுகிறது.

8·5. தேற்றங்கள் 2, 3 ; 8.6 தேற்றம் 4 ஆகியவற்றைப் பயன் படுத்தி, g ஆனது (a, b)-ல் வகைக்கெழு காணத் தக்கதென நிறுவலாம்.

∴ g ஆனது ரோல்ஸ் தேற்றத்தின் இரண்டாவது நிபந்தனையை நிறைவேற்றுகிறது. மேலும், $g(b)=g(a)=0$ (காண்பிக்க !)

∴ g ஆனது ரோல்ஸ் தேற்றத்தின் மூன்றாவது நிபந்தனையை நிறைவேற்றுகிறது.

∴ ரோல்ஸ் தேற்றத்தின்படி, (a, b)-ல் குறைந்த பட்சம் ξ என்ற ஒரு புள்ளியாவது $g'(\xi)=0$ என்றவாறு இருக்கிறது.

ஆனால், $g'(\xi)=-f'(\xi)-\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](-1)$

∴ $g'(\xi)=0$ என்றால், $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

குறிப்பு : மேற்கண்ட இடைத்தேற்றத்தின் வரைபட விளக்கம்

$a<c<b$ என்றவாறு ஒரு புள்ளி c யாவது, "f-ன் வரைபடத்தின் $(c, f(c))$ என்ற புள்ளியிடைத் தொடு கோடானது, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகும்'' என்றவாறு இருக்கிறது.

இடைத்தேற்றத்தின் இரு முக்கிய விளைவுகள்

விளைவு 1—தேற்றம் 3

f ஆனது $[a, b]$-ன் மீது வகைக்கெழு காணத் தக்கதென்றும், $[a, b]$-ன் எல்லா x-க்கும் $f'(x)=0$ என்றும் கொண்டால், $[a, b]$-ல் f ஆனது மாறிலியாகும். அதாவது, $[a, b]$-ன் எல்லா x-க்கும் ஒரு மெய்யெண் k ஆனது, $f(x)=k$ என்றவாறு இருக்கிறது.

நிறுவல்

f ஆனது மாறிலி அல்ல என்க. அப்படியென்றால், $[a, b]$-ல் x_1, x_2 என்ற இரு புள்ளிகள் $x_1<x_2$ என்றவாறும், $f(x_1)\neq f(x_2)$ என்றவாறும் இருக்கவேண்டும்.

$[x_1, x_2]$-ன் மீது f-க்கு இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தினால், (x_1, x_2)-ல் ஒரு புள்ளி ξ ஆனது

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$ என்றவாறு இருக்கிறது என்பதறி வோம். ஆனால் இது, $[a, b]$-ன் எல்லா x-க்கும் $f'(x)=0$ என்ப தற்கு எதிர் மறுப்பு. $\therefore$ f ஆனது $[a, b]$-ன் மீது மாறிலிச் சார்பு.

மாற்று நிறுவல்

x என்பது (a, b)-ன் யாதாமொரு புள்ளி என்க. இடைமதிப் புத் தேற்றத்தின்படி, (a, x)-ல் ஒரு புள்ளி ξ ஆனது,

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ஆனால் தேற்றத்தின்படி, $f'(\xi)=0$.

$\therefore$ $[a, b]$-ன் எல்லா x-க்கும் $f(x)=f(a)$.

விளைவு 2—தேற்றம் 4

f, g என்பவை $[a, b]$-ன் மீது வகைக்கெழு காணத் தக்கவை என்றும், $[a, b]$-ன் எல்லா x-க்கும் $f'(x)=g'(x)$ என்றும் கொண் டால், $f-g$ ஆனது $[a, b]$-ன் மீது மாறிலிச் சார்பு ஆகும்.

நிறுவல்

$[a, b]$-ன் எல்லா x-க்கும், $f'(x)=g'(x)$ என்பதால் $(f-g)'(x)=0$, $\forall x \in [a, b]$.

$\therefore$ மேற்கண்ட விளைவு 1 தேற்றம் 3-ன் படி, $f-g$ ஆனது $[a, b]$-ன் மீது மாறிலி ஆகும்.

தேற்றம் 5

α என்ற புள்ளியின் மூடிய அண்மை $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$-ல் f ஆனது வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதென்றும், அவ்வண்மையில்

(i) f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளது என்றும்

(ii) திறந்த அண்மை $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\epsilon)$-ல் ஒவ்வொரு புள்ளி x-க்கும் $f'(x)$ இருக்கிறது என்றும் கொண்டால், $|h| \leq \varepsilon$ என்ற வாறு ஒரு எண் h-க்கு ஏற்ப, குறைந்த பட்சம் ஒரு எண் θ ஆனது $(0<\theta<1)$, $f(\alpha+h)=f(\alpha)+h\, f'(\alpha+\theta h)$ என்றவாறு உள்ளது.

(இது, இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் மாற்றுவரையாகவும் கொள்ளலாம்)

நிறுவல்

8.11 தேற்றம் 2, இடைமதிப்புத் தேற்றத்தில், $b-a=h$ என்றும், $\xi=a+\theta h$, $0<\theta<1$ என்றும் கொண்டால், கொடுத்த நிபந்தனைகளின் கீழ் $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ என்று கிடைக்கப் பெறுகிறோம்.

குறிப்பு

கொடுத்த நிபந்தனைகளின் கீழ், குறைந்த பட்சம் ஒரு நேர் தகு பின்னம் θ ஆனது $f(b-h)=f(b)-hf'(b-\theta h)$ என்றவாறு இருக்கிறது.

தேற்றம் 6

$[a, b]$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f ஆனது

(i) $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ளது

(ii) (a, b)-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கது

என்றால்,

$[a, b]$-ல் $f'(x)\gtrless 0$-க்கு $[a, b]$-ல் f ஆனது ஒரே முறை ஏறுகிறது, இறங்குகிறது.

நிறுவல்

(a, b)-ல் இரு புள்ளிகள் x_1, x_2 என்பவை $x_1<x_2$ என்றவாறு இருக்கட்டும். அப்படியானால், இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் வழி,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_1+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

$$\therefore\quad f'(x_1+\theta h)\gtrless 0\text{-க்கு } \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\gtrless 0.$$

$$\therefore\quad f'(x)\gtrless 0\text{-க்கு } \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\gtrless 0$$

அதாவது,

$$f'(x)\gtrless 0\text{-க்கு } \frac{(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))}{(x_2-x_1)^2}\gtrless 0 \quad \because (x_2-x_1)^2>0.$$

அதாவது,

$f'(x) \gtrless 0$-க்கு $(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1)) \gtrless 0$

அதாவது,

$f'(x) \gtrless 0$-க்கு f ஆனது ஒரே முறை ஏறுகிறது, இறங்குகிறது.

தேற்றம் 7

$[a, b]$-ல் f-க்கு வகைக்கெழு $f_b'(x)$ இருக்கிறதென்றும், $\lim_{x\to\xi} f'(x)$ இருக்கிறதென்றும் கொண்டால்,

$$\lim_{x\to\xi} f'(x)=f'(\xi).$$

நிறுவல்

$$\lim_{x\to\xi} f'(x)=\lim_{h\to 0} f'(\xi+\theta h), \quad 0<\theta<1$$

ஆனால் மாற்றுவரை இடைமதிப்பு தேற்றத்தின்படி,

$$f'(\xi+\theta h)=\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \quad \text{(தேற்றம் 5)}$$

$$\therefore \lim_{x\to\xi} f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$
$$=f'(\xi).$$

குறிப்பு

இதனால் $f'(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியாய் இருப்பதற்கு வேண்டிய நிபந்தனை பெறப்பட்டது.

தேற்றம் 8

$[a, b]$-ன் மீது f' ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது என்க. அப்படியானால், $\epsilon>0$-க்கு ஒத்த ஒரு எண் $\delta>0$ ஆனது

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,\ x,\ x+h\in(a, b)\ 0<|h|<\delta$$

என்றவாறு இருக்கிறது.

நிறுவல்

f' ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியென்றால், சீரான தொடர்ச்சியானதும் கூட. $\therefore$ $\epsilon>0$-க்கு ஒரு $\delta>0$ ஆனது

(1) $\quad |f'(x+\xi)-f'(x)|<\varepsilon, 0<|\xi|<\delta$
என்றவாறு இருக்கிறது.

$0<|h|<\delta$ என்க.

$\therefore$ இடைமதிப்புத் தேற்றம் வழி,

$$(2) \ldots \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h), 0<\theta<1$$

$0<|h|<\delta$ என்பதாலும், $0<\theta<1$ என்பதாலும்,

$0<|\theta h|<\delta$ ஆகும்.

இப்போது $|\theta h|=\xi$ என்று வைத்துக்கொள்ளலாம்.

$\therefore$ (1) என்பது

(3) $\quad |f'(x+\theta h)-f'(x)|<\varepsilon, 0<|h|<\delta$

(2)-ஐப் பயன்படுத்த,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon, 0<|h|<\delta.$$

தேற்றம் 9

கோஷியின் வாய்ப்பாடு, அல்லது கோஷியின் இடைமதிப்புத் தேற்றம், அல்லது, பொதுவடிவ இடைமதிப்புத் தேற்றம். மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட இரு சார்புகள் f, φ என்பவை

(i) f-ம், φம் $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளவை.

(ii) திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் $f'(x)$-ம் $\varphi(x)$ ம் இருக்கின்றன.

(iii) (a, b)-ன் எப்புள்ளியிடத்தும் $\varphi'(x)\neq 0$ என்ற நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றினால், (a, b)-ல் குறைந்த பட்சம் ξ போன்ற ஒரு புள்ளியாவது,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

என்றவாறு இருக்கிறது.

நிறுவல்

முதலில் $\varphi(b)\neq\varphi(a)$ என்பதை உணர்க. எப்படியெனில், $\varphi(b)=\varphi(a)$ என்று வைத்துக்கொண்டால், தேற்றத்தில் கொடுத்த

φ-ன் பண்புகளுடன், φ ஆனது ரோல்ஸ் தேற்றத்தை நிறைவேற்றுவதால், (a, b)-ல் குறைந்த பட்சம் ஒரு புள்ளியிடத்து $\varphi'(x)=0$ ஆக இருக்க வேண்டும். இது நம் தேற்றத்தில் கொடுத்த படி $\varphi'(x)\neq 0$ என்பதற்கு எதிர்மறுப்பு அல்லவா?

ஆகையால் $\varphi(b)\neq\varphi(a)$ என்பது உறுதியாயிற்று.

$\therefore \dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள மாறிலி எண்.

$(\because \varphi(b)-\varphi(a)>0)$

$\therefore \dfrac{f(b)-f(c)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=K$ என்க.

$g(x)=f(x)-K\varphi(x)$ என்க.

$$\therefore g(a)=f(a)-K\varphi(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(c)}\varphi(a)$$

$$=\frac{f(a)\varphi(b)-f(b)\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

$$g(b)=f(b)-K\varphi(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi(b)$$

$$=\frac{f(b)\varphi(b)-f(b)\varphi(a)-f(b)\varphi(b)+f(a)\varphi(b)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

$$=\frac{f(a)\varphi(b)-f(b)\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

$\therefore g(a)=g(b)$

f-ம், φ-ம் $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் இருப்பதால், g-ம் $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. (a, b)-ல் $f'(x)$-ம், $\varphi'(x)$-ம் இருப்பதால், (a, b)-ல் $g'(x)$ உள்ளது. மேலும் $g(a)=g(b)$.

$\therefore$ ரோல்ஸ் தேற்றத்தின்படி, (a, b)-ல் குறைந்த பட்சம் ξ போன்ற ஒரு புள்ளியாவது, $g'(\xi)=0$ என்றவாறு உள்ளது.

$\therefore f'(\xi)-K\varphi'(\xi)=0$

$\therefore K=\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$

அதாவது, $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$

குறிப்புகள்

மேற்கண்ட தேற்றத்தில் $\varphi(x)=x$ என்றால் $\varphi(a)=a$; $\varphi(b)=b$; $\varphi'(x)=1$ என்பதால் $\varphi'(\xi)=1$.

$$\therefore \frac{f(h)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \text{ என்பது, } \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

என்றாகும். இது லாக்ராஞ்சின் இடைமதிப்புத் தேற்றமல்லவா ?

(2) மேற்கண்ட கோஷியின் வாய்ப்பாட்டை

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)},\ 0<\theta<1$$

என்றும் எழுதலாமல்லவா ?

(3) $f(a)=\varphi(a)=0$ என்றால், கோஷியின் வாய்பாடு,

$$\frac{f(b)}{\varphi(b)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \text{ என்றாகும்.} \quad [\xi\in(a,\ b)]$$

$\therefore f(x)=0$-க்கும் $\varphi(x)=0$-க்கும் பொது மூலம் $x=a$ என்றால்

அதாவது, $f(a)=\varphi(a)=0$ என்றால்

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},\ a<\xi<x$$

(4) $f'(x)=0$-க்கும், $\varphi'(x)=0$-க்கும் பொதுமூலம் உண்டெனின், கோஷியின் வாய்ப்பாடு உண்மை ஆகாது!

(5) $h>0$, $(a,\ a+h)$-ல் எல்லாப் புள்ளிகளிடத்து, f-ம், φ-ம் கோஷித் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றினால்,

$$f(a)=\varphi(a)=0 \text{ என்றால், } \lim_{x\to a^+}\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right] \text{ இருந்தால்;}$$

$$\lim_{x\to a^+}\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]=\lim_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right] \text{ என்பது உண்மை.}$$

இதுபோல் $(a-h,\ a)$-ல்

$$\lim_{x\to a^-}\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]=\lim_{x\to a^-}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right] \text{ என்பதும் உண்மை.}$$

நிறுவல்

கோஷித் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \ \xi = a+\theta h, \ 0<\theta<1$$

$f(a)=0$ என்று கொடுத்திருப்பதால் மேற்கண்ட வாய்ப்பாடு,

$$\frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}, \quad 0<\theta<1$$ என்றாகும்.

$$\therefore \lim_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}$$

$$= \lim_{\theta h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

இதுபோல் $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{\varphi(x)} + \lim_{x\to a^-}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ என நிறுவலாம்.

தேற்றம் 10

$f'(x)$ ஆனது (a, b)-ல் இருக்கிறதென்றால் அவ்விடைவெளியில் f'-க்கு நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மையோ, சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மையோ கிடையாது.

நிறுவல்

(a, b)-ல் $f'(x)$ ஆனது இருக்க வேண்டுமென்றால் f ஆனது அவ் விடைவெளியில் தொடர்ச்சியாயும், வகைக்கெழு காணத் தக்கதாயும் இருக்க வேண்டும். ξ என்பது (a, b)-ன் ஒரு புள்ளி என்க.

$h>0$ என்றால், $(\xi, \xi+h)$-ல், இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் வழி.

$$(1)\ldots \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = f'(\xi+\theta_1 h), \quad 0<\theta_1<1$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\xi+\theta_1 h)$$

(2) . . . $Rf'(\xi)=f'(\xi+0)$, $f'(\xi+0)$ இருந்தால். இப்போது, $(\xi-, \xi)$-ல், $h>0$, இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் வழி

$$\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h} = f'(\xi-\theta h_2), \quad 0<\theta_2<1$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{h-} = \lim_{h\to 0} f'(\xi-\theta_2 h)$$

(3) $\therefore$ $\lim f'(\xi)=f'(\xi-0)$, $f'(\xi-0)$ இருந்தால், ஆனல் தேற்றத்தில் கொடுத்துள்ளபடி, (a, b)-ல் $f'(x)$ இருக்கிறது.

$\therefore$ $\mathrm{R}\, f'(\xi)=\mathrm{L}\, f'(\xi)=f'(\xi)$

(4) அதாவது $f'(\xi+0) = f'(\xi - 0) = f'(\xi)$, $f'(\xi+0)$-ம், $f'(\xi-0)$-ம் இருந்தால், இப்போது f' ஆனது $x=\xi$ இடத்துத் தொடர்ச்சியின்மையாயிருந்தால் அத்தொடர்ச்சியின்மை சாதாரண மானதோ அல்லது நீக்கக்கூடியதாகவோ இருக்க முடியாது. ஏனெனில், சாதாரணத் தொடர்ச்சியின்மை, அதாவது, முதல் வகைத் தொடர்ச்சியின்மைக்கு, $f'(\xi+0)\neq f'(\xi-0)$ என்றிருக்க வேண்டும். (4)-ன் படி இது சாத்தியமில்லை.

நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மைக்கு, $f'(\xi+0)=f'(\xi-0)\neq f'(\xi)$ என்றிருக்க வேண்டும். (4)-ன் படி இதுவும் சாத்தியமில்லை.

$f'(\xi+0)$-ம், $f'(\xi-0)$-ம் இல்லவே இல்லை என்ருல் இரண்டாவது வகைத் தொடர்ச்சியின்மை கிடைக்கிறது. இது சாத்திய மாகலாம்.

தேற்றம் 11. டார்பூவின் தேற்றம் (Darboux's Theorem)

f ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் வகைக்கெழு காணத் தக்கதென்றும், $f'(a)$-ம், $f'(b)$-ம் ஒன்றுக்கொன்று முரணுன குறிகளைக் கொண்டவையென்றும் கொண்டால், திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் குறைந்தபட்சம் ξ-ஐப் போன்ற ஒரு புள்ளியாவது $f'(\xi)=0$ என்றவாறு உள்ளது.

நிறுவல்

$f'(a)>0$ என்றும், $f'(b)<0$

$[a, b]$-ல் f-க்கு வகைக்கெழு இருப்பதால் f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. $\therefore$ f ஆனது வரம்புள்ளது. $\therefore [a, b]$-ல் ஒரு தடவையாவது தன் வரம்புகளை f அடைகிறது. $x\in[a, b]$, $f(x)$-ன் l.u.b. ஆனது L என்க. $\therefore$ $[a, b]$-ல் குறைந்தபட்சம் ξ போன்ற ஒரு புள்ளியாவது,

$f(\xi)=L$

$\xi\neq a$, $\xi\neq b$ என்பது எப்படியெனில்,

$f'(a)>0$ என்பதால், $x=a$ இடத்து f ஆனது ஏறுகிறது.

$\therefore$ மிகச் சிறிய $h>0$, $a<x<a+h$-ல், $f(x)>f(a)$

ஆனால் $L \geqq f(x)$

$\therefore \; L>f(a)$

$\therefore \; f(\xi)>f(a) \quad \therefore \; \xi>a$

$\therefore \; \xi \neq a.$

$f'(b)<0$ என்பதால், $x=b$ இடத்து f ஆனது இறங்குகிறது.

$\therefore$ மிகச் சிறிய $h>0$, $b-h<x<b$-ல் $f(x)>f(b)$

ஆனால் $L \geqq f(x)$

$\therefore \; L>f(b)$

$\therefore \; f'(\xi)>f(b) \quad \therefore \xi<b$

$\therefore \; \xi \neq b$

$\therefore \; f(\xi)=L,\; a<\xi<b.$

இப்போது, $f'(\xi)=0$ என்பதைக் காண்பிக்கவேண்டும்.

$\therefore \; f'(\xi) \not> 0, \quad f'(\xi) \not< 0$ என்று நிறுவினால் போதும்.

$f'(\xi)>0$ என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore \; f$ ஆனது $x=\xi$ இடத்து ஏறுகிறது.

$\xi<b$ என்பதால், $\xi<\xi_1<\xi+h$, $h>0$, h மிகச் சிறியது, என்பதற்கு,

$f(\xi_1)>f(\xi)$

ஆனால் $L=f(\xi)$

$\therefore \; f(\xi_1)>L$

இது l.u.b.-ன் பண்பிற்குப் புறம்பல்லவா ?

$\therefore \; f'(\xi) \not> 0$

இப்போது $f'(\xi)<0$ என்க.

$\therefore \; f$ ஆனது $x=\xi$ இடத்து இறங்குகிறது.

$\xi>a$ என்பதால், மிகச் சிறிய $h>0$, $\xi-h<\xi_2<\xi$-க்கு, $f(\xi_2)>f(\xi)$.

அதாவது $f(\xi_2)>L$

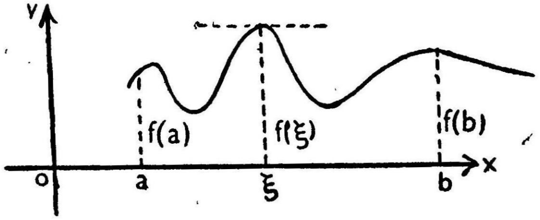
இதுவும் l.u.b.-ன் பண்புக்குப் புறம்புதானே?

$\therefore \quad f'(\xi) \nless 0.$

$\therefore \quad f'(\xi) = 0.$

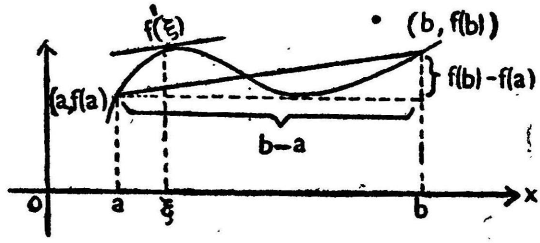
மாதிரிக் கணக்குகள்

(1) ரோல்ஸ் தேற்றத்தை விளக்கும் வரைபடம் ஒன்று வரைக.



படம் 70

(2) லாக்ராஞ்சின் முதல் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை விளக்கும் வரைபடம் ஒன்றை வரைக.



படம் 71

(3) (a, b)-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்தும் f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கது என்க. எல்லா $x \in (a, b)$-க்கும் $f(\alpha) \geqq f(x)$ என்றவாறு $\alpha \in (a, b)$ என்றால், $f'(\alpha) = 0$ என்றும், எல்லா $x \in (a, b)$-க்கும் $f(\beta) \leqq f(x)$ என்றவாறு $\beta \in (a, b)$ என்றால், $f'(\beta) = 0$ என்றும் நிறுவுக.

நிறுவல்

$$f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}, \quad h > 0$$

$\forall \alpha + h \in (a, b,)$-க்கு, $f(\alpha+h) \leq f(\alpha)$ என்பதால்,

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \leqq 0,\ h>0 \quad \therefore Rf'(\alpha) \leqq 0$$

அல்லது, $\dfrac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h} \geqq 0,\ h>0,\ f(\alpha h) \leqq f(\alpha)$.

$\therefore \quad Lf'(\alpha) \geqq 0$

f ஆனது (a, b)-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கதென்பதால், $f'(\alpha)$ இருக்கிறது.

$\therefore \ Rf'(\alpha) = Lf'(\alpha)$.

$\therefore \ f'(\alpha)=0$.

இப்போது, $f'(\beta) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h}$, $h>0$

$\forall \beta+h \in (a, b)$-க்கு, $f(\beta+h) \geqq f(\beta)$ என்பதால்,

$\dfrac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h} \geqq 0$, $h>0$, அதாவது, $Rf'(\beta) \geqq 0$

அல்லது,

$\dfrac{f(\beta-h)-f(\beta)}{-h} \leqq 0$, $h>0, f(\beta-h) \geqq f(\beta)$

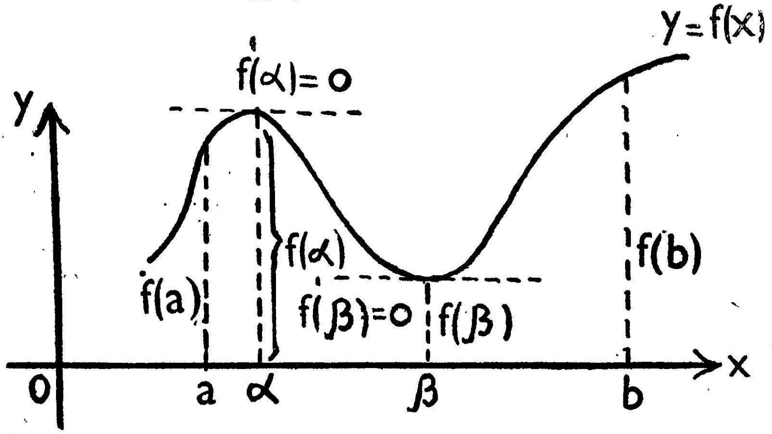
அதாவது $Lf'(\beta) \leqq 0$.

f ஆனது (a, b)-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கதென்பதால், $f'(\beta)$ இருக்கிறது.

$\therefore \ Rf'(\beta) = Lf'(\beta)$

$\therefore \ f'(\beta) = 0$

இதனை விளக்க இதோ வரைபடம் :



படம் 72

குறிப்பு

$x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீப்பெரிய மதிப்பும்,

$x=\beta$ இடத்து f-க்கு மீச்சிறிய மதிப்பும் இருக்கின்றன என்று சொல்லுவார்கள்.

(4) (i) $f(x)=1, \quad 0\leq x<\frac{1}{2}$

$=2, \quad \frac{1}{2}\leq x\leq 1$

(ii) $f(x)=\sin x, \ [0, \pi]$

என்ற சார்புகளுக்கு, ரோல்ஸ் தேற்றம் தரும் ξ-ஐக் காண்க.

விடை

(i) $[0, 1]$ முழுமையிலும் f ஆனது தொடர்ச்சியற்றது. ஏனெனில், $x=\frac{1}{2}$ இடத்து f-க்கு "தாவும் தொடர்ச்சியின்மை" (jump discontinuity) இருக்கிறது. ரோல்ஸின் முதல் நிபந்தனை தவறியது. மேலும் $f(0)=1\neq 2=f(1)$. $\therefore f(0)\neq f(1)$ ரோல்ஸின் மூன்றாவது நிபந்தனையும் தவறியது.

α என்பது $(0, \frac{1}{2})$-ன் ஒரு புள்ளி என்க

படம் 73

$$Rf'(\alpha)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$Lf'(\alpha)=\lim_{h\to 0}\frac{f(d+h)-f(\alpha)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{-h}=0$$

$$\therefore f'(\alpha)=0$$

$\therefore$ ரோல்ஸ் நிபந்தனைகள் தவறியும், குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி α-ஐ $f'(\alpha)=0$ என்றவாறு கண்டுவிட்டோம். ஆனாலும் இந்த α, ரோல்ஸ் தந்ததல்ல.

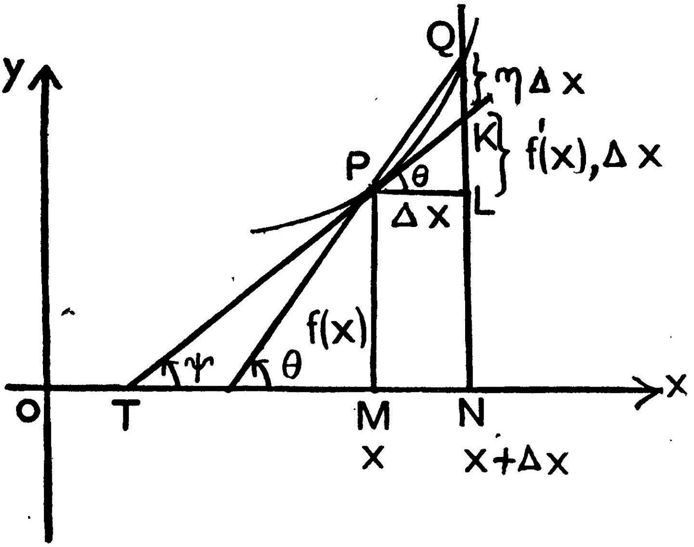
(ii) f ஆனது $[0, \pi]$-ல் முழுமையிலும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. $f(0)=\sin 0=0=\sin \pi=f(\pi)$.

$\therefore$ ரோல்ஸின் முதல், மூன்றும் நிபந்தனைகள் நிறைவேறின. $\xi\in(0,\pi)$ என்றால் $f'(\xi)=\cos \xi$ என்றும் நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore$ ரோல்ஸின் இரண்டாம் நிபந்தனையும் நிறைவேறியது.

$\xi = \frac{\pi}{2}$-க்கு $\cos \xi = 0$. $\therefore$ ரோல்ஸ் தரும் $\xi = \frac{\pi}{2}$.

(5) ஒரு சார்பின் வகையீட்டிற்கு வரைபடம் ஒன்று வரைக.



படம் 74

$OM = x$, $ON = x + \Delta x$ என்றால்

$PM = f(x)$, $QN = f(x + \Delta x)$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = LQ = LK + KQ$$
$$= PL \tan \psi + KQ$$
$$= \Delta x . \tan \psi + KQ$$
$$= \Delta x . f'(x) + KQ$$

$\therefore$ வகையீடு $= KL$

$$KQ = \eta \cdot \Delta x$$

$Q \to P$ என்றால் $LQ \to LK$

அதாவது $\Delta x \to 0$ என்றால் $f(x + \Delta x) - f(x) \to f'(x) \cdot \Delta x$

அதாவது, $| f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x) . \Delta x | < \Delta x$, $\varepsilon > 0$. ($\Delta x \to 0$ என்னும்போது, $\eta \to 0$ என்பதால் Δx-ஐ விட $\eta \Delta x$ சிறியது).

(6) (i) $f(x)=\log x$, $[1, \epsilon]$

(ii) $f(x)=ax^2+bx+c$, $[A, B]$

என்ற சார்புகளுக்கு இடைமதிப்புத் தேற்றம் தரும் ξ-ஐக் காண்க.

(i) $\log x=\log a+\log \frac{x}{a}$, $1 \leq a \leq e$

$x \to a \to \frac{x}{a} \to 1$

$\therefore \lim_{x \to a} \log x=\log a+\log 1=\log a+0=\log a$

$\therefore$ log ஆனது $[1, e]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$f'(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x \in (1, e)$ என்பதும் உண்மை.

எப்படியெனில்,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\log\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]=\frac{1}{x}\log e^{e}=\frac{1}{x}$$

$\therefore f$ ஆனது இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகிறது. $\therefore (1, e)$-ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி ξ ஆவது,

$f'(\xi)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}$ என்றவாறு இருக்கிறது.

அதாவது $\frac{1}{\xi}=\frac{1-0}{e-1}$ $\therefore \xi=e-1$.

(ii) $f(x)$ ஆனது பல்லுறுப்பு ஆதலின் f ஆனது $[A, B]$-ல் தொடர்ச்சியாயுள்ளதுடன், $f'(x)$-ம் (A, B)-ல் இருக்கிறது.

$$\therefore \quad f'(x)=2ax+b$$

இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின்படி, (A, B)-ல் குறைந்தபட்சம் ξ என்ற ஒரு புள்ளியாவது

$f'(\xi)=\dfrac{f(B)-f(A)}{B-A}$ என்றவாறு இருக்கிறது.

அதாவது

$$f'(\xi)=\frac{aB^2+bB+c-aA^2-bA-c}{B-A}$$

$$=\frac{a(B^2-A^2)+b(B-A)}{B-A}$$

$$=a(B+A)b$$

$$\therefore \quad 2a\xi+b=a(B+A)+b$$

$\therefore \quad \xi=\dfrac{A+B}{2}$ இதுதான் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் ξ.

(7) $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும் $f'(x)=$ மாறிலி K என்றால், $f(x)=kx+l$, l ஒரு மாறிலி. எனக் காண்பிக்க.

படம் 75

x என்பது $[a, b]$-ன் யாதாமொரு புள்ளி என்றால், (a, x)-ல் இடைமதிப்புத் தேற்றம் தருவது,

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad a<\xi<x$$

அதாவது

$$K=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\therefore f(x)=(x-a)K+f(a)=Kx-aK+f(a)$$

$$=Kx+[f(a)-aK)]$$

$$\therefore f(x)=Kx+l, \quad l=f(a)-aK.$$

(8) $[a, b]$-ல் f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கது; $f'(a)$-ம், $f'(b)$-ம் ஒன்றுக்கொன்று முரணான குறிகள் கொண்டவை

$f'(a) < M < f'(b)$ என்றவாறு ஒரு எண் M இருக்கிறது. அப்படியானல் $f'(\xi) = M$ என்றவாறு குறைந்தபட்சம் ξ போன்ற ஒரு புள்ளியாவது (a, b)-ல் இருக்கிறது என நிறுவுக.

$g(x) = f(x) - Mx$ என்க.

M என்பது மாறிலி எண் ஆதலால், Mx வகைக்கெழு காணத்தக்கது.

$\therefore\ g'(x) = f'(x) - M$

$g'(a) = f'(a) - M > 0 \quad \because f'(a) > M$ (தேற்றத்தின்படி)

$g'(b) = f'(b) - M < 0 \quad \because f'(b) < M$ (தேற்றத்தின்படி)

$\therefore$ g-க்கு $[a, b]$-ல் வகைக்கெழு இருப்பதுடன், $g'(a)$-ம் $g'(b)$-ம் முரணான குறிகள் உடையவை.

$\therefore$ டார்பூவின் தேற்றப்படி, (a, b)-ல் ஒரு புள்ளி ξ ஆனது

$g'(\xi) = 0$ என்றவாறு இருக்கின்றது.

அதாவது $f'(\xi) - M = 0$

அதாவது $f'(\xi) = M$.

8·12. உயர்வரிசை இடைமதிப்புத் தேற்றங்கள் (Mean Value Theorems of Higher Order)

தேற்றம் 1

$[a, b]$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f ஆனது

(i) $[a, b]$-ல் $f'(x)$ இருக்கிறது. (ii) $[a, b]$-ல் f' தொடர்ச்சியாயுள்ளது. (iii) (a, b)-ல் f'-க்கு வகைக்கெழு இருக்கிறது. என்றால், (a, b)-ல் ξ போன்ற குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளியாவது,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(\xi)$$

என்றவாறு இருக்கிறது.

நிறுவல்

$g(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}\cdot A$ என்றும், A என்பது $g(a) = g(b)$ என்றவாறு உள்ளதென்றும் கொள்க.

f-ம், f'-ம் $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதுடன், $[a, b]$-ல் அவை தொடர்ச்சியாய் உள்ளன.

$\therefore$ g-ம் $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதுடன், $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

மேலும் $g(a) = g(b)$

$\therefore$ g ஆனது ரோல்ஸ் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகிறது.

$\therefore$ (a, b)-ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி ξ ஆவது $g'(\xi)=0$ என்றவாறு இருக்கிறது.

இப்போது, $g'(x) = f'(x)+(b-x)f''(x)-f'(x)-\frac{2}{2!}(b-x)\ A$

$$g'(x) = f'(x)+(x-xf''(x)-f'(x)-(b-x)\ A$$

$\therefore$ $g'(\xi) = (b-\xi)\,f''(\xi) - (b-\xi)\,A = 0$ என்றவாறு $\xi \in (a, b)$ இருக்கிறது.

அதாவது $A = f''(\xi)$ $\because$ $\xi \neq b$.

$$g(a) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}A$$

$$g(b) = f(b)$$

$$\because g(a) = g(b),$$

$$\therefore f(a)+(b-a)\,f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}A = f(b)$$

ஆனால் $A = f''(\xi)$

$$\therefore f(b) = f(a)+(b-a)\,f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(\xi).$$

தேற்றம் 2. டெய்லர் தேற்றம் (Taylor's Theorem)

$[a, a+h]$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு f என்றும்

(i) $f, f', f'', f''', \cdots, f^{(n-1)}$ என்பவை $[a, a+h]$மீது வரையறுக்கப் பட்டுள்ளன என்றும்,

(ii) $f, f', f'', f''', \cdots, f^{(n-1)}$ என்பவை $[a, a+h]$-ன் மீது தொடர்ச்சியாய் உள்ளன வென்றும்

(iii) $f^{(n)}(x)$ ஆனது $(a, a+h)$-ல் இருக்கிறது என்றும்

(iv) $0 < p \leq n$ என்றவாறு p என்பது நேர் எண் என்றும் கொண்டால், $(0, 1)$-ல் குறைந்தபட்சம் θ என்ற ஒரு எண்

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

என்றவாறு இருக்கிறது.

நிறுவல்

$$(1)\ldots g(x)=f(x)+(a+h-x)f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)$$
$$+\ldots+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+(a+h-x)^p.\ A$$

என்றும்,

(2) . . . $g(a)=g(a+h)$ என்றும் கொள்க.

$\therefore\ g(a+h)=f(a+h),$

$$g(a)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$
$$\frac{h^{n-1}}{(n-1)}f^{(n-1)}(a)+h^p.\ A$$

$\therefore$ (2)-ன் படி,

$$(3)\ldots f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f'(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{n-1!}$$
$$f^{(n-1)}(a)+h^p.\ A$$

(1)-ன் வலது பக்கத்தில் காணப்படும் $f, f', \ldots f^{(n-1)}$ ஆகியவை $[a, a+h]$-ல், தேற்றத்தில் கொடுத்தபடி, தொடர்ச்சியானவை. மேலும் $(a+h-x)$-ஐ மதிப்பாய்க்கொண்ட சார்பும் $[a, a+h]$-ல் தொடர்ச்சியானதே (பல்லுறுப்பாயிற்றே !).

$\therefore$ g ஆனது $[a, a+h)$-ல் தொடர்ச்சியானது.

$f^{(n)}(x)$ இருப்பதால், g ஆனது $(a, a+h)$-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கது. மேலும் $g(a)=g(a+h)$, தற்கோள் (2)-ன் படி

$\therefore$ g ஆனது ரோல்ஸ் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகிறது.

$\therefore$ (0, 1)-ல் குறைந்தபட்சம் θ போன்ற ஒரு எண்ணுவது

(4) . . . $g'(a+\theta h)=0$ என்றவாறு உள்ளது.

இப்போது,

$$g'(x) = f'(x) - f'(x) + (a+h-x)f''(x) - (a+h-x)f''(x) + \ldots .$$

$$\ldots \ldots - \frac{(a+h-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{n-1}(x) + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)$$

$$-pA(a+h-x)^{p-1}$$

$$(5) \quad \therefore \; g'(x) = \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1!)} f^{(n)}(x) - pA(a+h-x)^{p-1}$$

(5)-ல் x-க்குப்பதில் $a+\theta h$-ஐப் பயன்படுத்தினல்

$$g'(a+\theta h) = \frac{(a+h-(a+\theta(h))^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h) -$$

$$pA(a+h-)a+\theta h)^{p-1}$$

$$= \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h) - pA\, h^{p-1}(1-\theta)^{p-1}$$

(4) 1-லிருந்து,

$$0 = \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h) - pA\, h^{p-1}(1-\theta)^{p-1}$$

அதாவது,

$$\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h) = pA(1-\theta)^{p-1} h^{p-1}$$

$$(6) \quad \therefore \quad A = \frac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)! \cdot p} f^{(n)}(a+\theta h)$$

இந்த A-ஐ (3)-ல் பயன்படுத்த,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ h^p \cdot \frac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)! \cdot p} f^{(n)}(a+\theta h)$$

$$= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)! \cdot p} f^{(n)}(a+\theta h)$$

குறிப்புகள் (முக்கியமானவை)

(1) டெய்லர் தேற்றத்தின் $f(a+h)$-ன் விரிதல் (expansion)- n உறுப்புகளுக்கு அடுத்துவரும் உறுப்பான

$\frac{h^n(1-0)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(a+\theta h)$-க்கு "ஷ்லோமில்ஃ" அல்லது "ரோஃெ" (Schlomilch or Roche)-ன் மீதி எனப்பெயர். இதனை R_n எனக் குறிப்பர். $0<\theta<1$

(2) $p=1$ என்றால் இம் மீதியானது

$$R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(a+\theta h)}{(n-1)!}$$ என்றாகும். இதனைக் "கோஷி" (Cauchy)யின் மீதி என்பர். $0<\theta<1$

(3) $p=n$ என்றாலோ,

$$R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-n}f^{(n)}(a+\theta h)}{(n-1)!\,.\,n}$$

$$=\frac{h^n}{n!}(1-\theta)^0 f^{(n)}(a+\theta h)$$

$$=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$$ என்றாகும். இதனையே, "லாக்ராஞ்சி" (Lagrange)யின் மீதி என்பர். $0<\theta<1$

தேற்றம் 3. "மெக்ளாரின்" (Maclaurin) தேற்றம்:

இது டெய்லர் தேற்றத்தின் சிறப்பு வகை. டெய்லர் தேற்றத்தை எப்படி நிறுவினோமோ அவ்வண்ணமே இத்தேற்றத்தையும் நிறுவவேண்டும்.

டெய்லர் தேற்றத்தின் வரையில் a-க்குப் பதில் 0-ஐ எழுத வேண்டும், கிடைப்பது,

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)$$

$$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(\theta h)$$ என்பதாகும்.

மெக்ளாரின் தேற்றத்தின் வரை

$[0, h]$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு f ஆனது

(i) $f^{(n-1)}(x)$ $[0, h]$-ல் இருக்கிறது; $f^{(n-1)}$ ஆனது $[0, h]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

(ii) $f^{(n)}(x)$ இருக்கிறது $(0, h)$-ல்

(iii) $0<p\leq n$

என்றால், $(0, 1)$-ல் ஒரு எண் θ ஆனது

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)$$

$$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\cdot p}f^n(\theta h)$$

என்றவாறு இருக்கிறது.

(இதற்கு ஷ்லோமில்ஃ-ரோஃ மீதி இருப்பதைக் கவனியுங்கள்.)

நிறுவல்

டெய்லர் தேற்றத்தை நாம் நிறுவியபடியேதான் இத்தேற்றத்தையும் நிறுவ வேண்டும்.

குறிப்பு : டெய்லர் தேற்றத்தை கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம்

α என்ற புள்ளியின் மூடிய அண்மையில், அதாவது, $\alpha-\varepsilon\leq x\leq\alpha+\varepsilon$-ல் f ஆனது வரையறுக்கப் பட்டுள்ள தென்றும்,

(i) $f^{(n-1)}(x)$ ஆனது $[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$-ல் இருப்பதுடன் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

(ii) $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$-ல் $f^{(n)}(x)$ இருக்கிறது.

(iii) $0<p\leq n$

என்றும் கொண்டால், $|h|<\varepsilon$ என்பதற்கு ஒத்த h-க்கு ஏற்ப, $0<\theta<1$-ல் குறைந்தபட்சம் θ என்ற ஒரு எண்,

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+hf'(\alpha)+\frac{h^2}{2!}f''(\alpha)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\alpha)$$

$$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\cdot p}f^n(\alpha+\theta h)$$

என்றவாறு இருக்கிறது.

தேற்றம் 4 "யங்" (Young)கின் அமைப்பில் டெய்லர் தேற்றம்

f ஆனது $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்றும்,

i) $f^{(n-1)}(x)$ ஆனது $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$-ல் இருப்பதுடன் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

(ii) $f^{(n)}(\alpha)$ ஆனது இருக்கிறது.

(iii) $|h| < \varepsilon$

என்றால்,

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+hf'(\alpha)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(\alpha)$$
$$+\frac{h^n}{n!}\{f^n(\alpha)+\varepsilon_h\},$$

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon_h=0.$$

நிறுவல்

மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டது!

8·13. டெய்லர், மெக்ளாரின் முடிவில்லாத் தொடர்கள் (Taylor's, Maclaurin's Infinite Series)

டெய்லர் தேற்றத்தில்

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(a+\theta h)$$

என்பதில் வலதுபுறத்துத் தொடரில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை S_n என்றும், $\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(a+\theta h)$-ஐ R_n என்றும் கொண்டால்,

$f(a+h)=S_n+R_n$ என்றெழுதலாம்.

$n\to\infty$ என்னும்போது, $R_n\to 0$ என்க.

$$\therefore f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots \text{ (மு.வ)}$$

∴ பொதுவாக,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}$$
$$f^{(n)}(x)+\ldots \text{ (மு.வ)}$$

என்பதுடன், $\lim_{n\to\infty}R_n=0$.

இதைத்தான் டெய்லர் முடிவில்லாத் தொடர் என்பது.

இப்போது, மெக்ளாரின் தேற்றத்திலிருந்து,

$\lim_{n\to\infty} R_n=0$ என்றால்

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots \text{ (மு.வ.)}.$$

இதுதான் மெக்ளாரின் முடிவில்லாத் தொடர் என்பது!

8·14. மெக்ளாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, சில முடிவில்லாத தொடர்கள்

(1) அடுக்குக் குறித் தொடர் (Exponential Series)

லாக்ராஞ்சின் மீதியைக்கொண்ட மெக்ளாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$\forall x,\ e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ (மு.வ.) என நிறுவுக.

$f(x)=e^x$ என்றால்

$f'(x)=e^x, f''(x)=e^x, \ldots, f^{(n)}(x)=e^x, \ldots$

$\therefore\ f'(0)=e^0=1, f''(0)=1, \ldots, f^n(0)=1, \ldots$

$$R_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}$$

$x>0$ என்றால் $e^{\theta x}<e^x$. $x<0$ என்றால் $e^{\theta x}<1$

$0<\theta<1$ என்பதால் $|e^{\theta x}|<M$ (மாறிலி எண்)

$$\lim_{n\to\infty} R_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}=\lim_{h\to\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\lim_{h\to\infty}e^{\theta x}$$

இப்போது, $u_n=\frac{x^n}{n!}$ என்றால், $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{n+1}$

$\therefore\forall x, \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0 \because u_n\to 0 \because \lim\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=l,$

$-1<l<1$ என்றால் $\lim\varphi(n)=0$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n=0.$

$\therefore e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$ (மு.வ)

(2) ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series)

$f(x)=(1+x)^m$, m ஒரு மெய்யெண் என்றால்,

$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=m$$

$$f''(0)=m(m-1)$$

$f'''(0)=m(m-1)(m-2)$ முதலியன.

∴ மெக்ளாரின் தொடர்வழி,

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

m ஆனது நேர் முழுவெண்ணுனல், இத்தொடர் முடிவுள்ள தாகின்றது. இத்தொடரின் கடைசி உறுப்பு

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-m+1)}{m!}x^m=x^m \text{ என்பதாகும்.}$$

m ஆனது நேர்முழுவெண் இல்லை என்றும் $-1<x<1$ என்றும் கொள்க.

கோஷியின் மீதியாவது

$$R_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\,2\cdots(n-1)}\cdot\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^{n-m}}$$

$\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$, $x>0$ ஆகவோ, $x<0$ ஆகவோ இருக்கலாம்.

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n-1}}\frac{x^n}{(1+\theta x)^{1-m}}$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\ldots(n-1)}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta x)^{1-m}}$$

$$<\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\ldots(n-1)}\frac{x^n}{(1+\theta x)^{1-m}},\quad\because\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$$

இப்போது, $\frac{1}{(1+\theta x)^{1-m}}<\frac{1}{(1+|x|)^{1-m}}$, $m>1$

அதேபோல், $\frac{1}{(1+\theta x)^{1-m}}<\frac{1}{(1-|x|)^{1-m}}$, $m<1$

$$\therefore\ |R_n| < |m| \left|\frac{(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ (n-1)}\right| |x|^{n-1} (1\pm|x|)^{m-1}\ |x|$$

$$< |m|\ \ |(m-1)\,C_{n-1}\,x^{n-1}|\,(1\pm|x|)^{m-1}$$

ஆனல் $(m-1)\,C_{n-1}\,x^{n-1}\to 0,\ n\to\infty,\ (-1<x<1)$

$\therefore\ R_n\to 0;\ n\to\infty$.

$\therefore$ $(-1, 1)$-ன் எல்லா x-க்கும், ஈருறுப்புத் தேற்றம் உண்மையாயிற்று.

அதாவது,

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots\ (\text{மு.வ.})$$

(3) ஸைன், கொஸைன் தொடர்கள்

$f(x)=\sin x$ என்க.

$\forall x$-க்கு, f-க்கு எல்லா வரிசை வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன.

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$|f^{(n)}x| = \left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1\ \forall x, n$$

மெக்ளாரினின் லாக்ராஞ்ச் மீதி

$$R_n=\frac{h^n}{\lfloor n!}f^{(n)}(\theta h)$$

$$\leq \frac{h^n}{n!}\cdot 1=\frac{h^n}{n!}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n=0,\ \because\ \lim_{n\to\infty}\frac{h^n}{n!}=0,\ \text{எந்த } h\text{-க்கும்}$$

$$\therefore \sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x+\cdots\ \forall x,h.$$

$$\therefore\ x=0\text{-க்கு},\ \sin h=h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots(\text{மு.வ.})\ \forall h.$$

இதேபோல் $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots$ மு.வ.

(4) மடக்கைத் தொடர் (**Logarithmic Series**)

$f(x) = \log(1+x)$ என்றால் f-ன் வரையறை அரங்கம் $x > -1$ என்றால், f-க்குத் தொடர்ச்சியான வகைக்கெழுக்கள் உண்டென நமக்குத் தெரியும்.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = \frac{(-1)}{(1+x)^2},\ \cdots f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

R_n என்பது கோஷியின் மீதியெனில்,

$$R_n = (-1)^{n-1} x^n.\ \frac{1}{1+\theta x} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

$|x| < 1$ என்றால், $x^n \to 0$, $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1, \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1-|x|}$

$\therefore R_n \to 0.$

$x = 1$ என்றால் கோஷியின் மீதியினால் ஆதாயமில்லை.

லாக்ராஞ்சியின் மீதியை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

$$0 < x \leq 1,\ 0 < \frac{x}{1+\theta x} < 1$$

$$\therefore |R_n| < \frac{1}{n}$$

$$\therefore R_n \to 0,\ n \to \infty.$$

$$\therefore -1 < x \leq 1,\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \text{ (மு.வ).}$$

8·14. தேராக்கணிய வடிவுகள் (Indeterminate Forms) "லோபிதால்" விதி (L'Hospital's Rule)

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ என்ற அண்மையின் முழுமையிலும் f, g என்பவை வகைக்கெழு காணத் தக்கவை யென்றும், $f(a) = g(a) = 0$ என்றும், $g'(x) \neq 0$, $(\forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon))$ என்றும் கொள்க.

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ இருக்கிறதென்றால், $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$-ம் இருக்கிறது;

மேலும், $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

நிறுவல்

கோஷியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின்படி,
$(a-\varepsilon, a+\epsilon)$-ன் ஒவ்வொரு x-க்கும் ஏற்ப, (a, x)-ல் ஒரு புள்ளி ξ ஆனது $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(\xi)}{g'(\xi)}$ என்றவாறு இருக்கிறது.

$$\because f(a)=g(a)=0, \quad \therefore \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$x \to a \to \xi \to a$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

தேற்றத்தில் $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ இருக்கிறதென்பதால், $\lim_{\xi \to a}\left[\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$ இருக்கிறது.

(x என்ற குறிக்குப் பதில் ξ என்ற குறி பிரதியிடப்பட்டுள்ளது. அவ்வளவுதானே.)

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

மாதிரிக் கணக்குகள்

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ என்ன ?

விடை

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 ; \lim_{x \to 0} x = 0$$

ஆனால் $\frac{0}{0}$ என்பது தேராக்கணியம் ஆயிற்றே!

மேலும் $\sin 0 = 0$;

$\therefore$ லோபிதால் விதிப்படி, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) இது சரியாவென்று ஆராய்க:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-2x+1}{x^2+x-1}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{6x-2}{2x+1}=\lim_{x\to 2}\frac{6}{2}=3$$

விடை

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x+1}{x^2+x-1}=\frac{3\,(2^2)-2\,(2)+1}{(2)^2+2-1}=\frac{9}{5}$$

பின்னத்தின் மேற்பகுதியும், கீழ்ப்பகுதியும் 0 அல்லவே? 9, 5 தானே! தொகுதி, விகுதி இரண்டுமே 0 ஆகிவிட்டால்தான் லோபிதாவை உபயோகிக்க வேண்டும்.

8·15. ஒரு சார்பின் மீப்பெருமங்களும், மீச்சிறுமங்களும் (Maxima and Minima of a Function)

ஒரு சார்பின் மீப்பெரிய அல்லது மீச்சிறிய மதிப்புகளை அசாதாரண மதிப்புகள் (Extrema) என்றும் சொல்லுவதுண்டு.

வரை இலக்கணம்

f ஆனது $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதென்றும், $\alpha\in(a, b)$ என்றும்,

(1) $0<|h|<\delta$-க்கு $f(\alpha+h)-f(\alpha)<0$ என்றவாறு $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ என்ற அண்மை இருந்தால் f-க்கு $x=\alpha$ இடத்து **மீப்பெருமம்** உண்டு என்றும், $0<|h|<\delta$-க்கு,

(2) $f(\alpha+h)-f(\alpha)>0$ என்றால் f-க்கு $x=\alpha$ இடத்து **மீச்சிறுமம்** உண்டு என்றும் வரையறுக்கலாம்.

(1)-லிருந்து, $h\gtrless 0$-க்கு $h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}\lesseqgtr 0$ என்றால், f-க்கு $x=\alpha$ இடத்து மீப்பெருமம் உண்டு என்றும்,

(2)-லிருந்து, $h\gtrless 0$-க்கு $h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}\gtrless 0$ என்றால் f-க்கு $x=\alpha$ இடத்து மீச்சிறுமம் உண்டு என்றும் அறியலாம்.

குறிப்பு

$x=\alpha$ இடத்து f-ன் மீப்பெருமம் ஆனது $[a, b]$-ல் fன் l.u.b. ஆக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை; அப்படி l.u.b. ஆக இருந்துவிட்டால், $f(\alpha)$-ஐ f-ன் $x=\alpha$ இடத்துத் "தனி மீப்பெருமம்" என்பர்.

அதுபோல், $x=\alpha$ இடத்து f-ன் மீச்சிறுமம் ஆனது $[a, b]$-ல் f-ன் g.l.b. ஆக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை; அப்படி g.l.b. ஆக இருந்து விட்டால் $f(\alpha)$-ஐ f-ன் $x=\alpha$ இடத்துத் "தனி மீச்சிறுமம்" என்பர்.

தேற்றம் 1

f என்னும் சார்பு $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்றும், $x=\alpha\in(a, b)$ இடத்து அசாதாரண மதிப்பு (extremum) அதாவது, மீப்பெருமமோ, மீச்சிறுமமோ, இருக்கிறதென்றும், மேலும் $f'(\alpha)$ முடிவுள்ளதாய் இருக்கிறது என்றும் கொண்டால், $f'(\alpha)=0$.

நிறுவல்

முடியுமானால், $f'(\alpha)\neq 0$ என்க.

$\therefore f'(\alpha)>0$ அல்லது $f'(\alpha)<0$.

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி 1: $f'(\alpha)>0$ என்க.

அப்போது, f ஆனது $x=\alpha$ இடத்து ஏறுகிறது.

$\therefore h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}>0, 0<|h|<\delta.$

இது, $h>0$-க்கும், $h<0$-க்கும் உண்மை.

ஆனால் $x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீப்பெருமம் உண்டென்றால்,

$h>0$-க்கு, $h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}>0$,

$h<0$-க்கு, $h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}>0$, என்றாக வேண்டும்.

$\therefore x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீப்பெருமம் கிடையாது.

$x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீச்சிறுமம் உண்டென்றால்,

$h>0$-க்கு $h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}>0$,

$h<0$-க்கு $h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}<0$, என்றாக வேண்டும்.

$\therefore x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீச்சிறுமம் கிடையாது.

$\therefore f'(\alpha)>0$ என்றால் f-க்கு $x=\alpha$ இடத்து மீப்பெருமமோ, மீச்சிறுமமோ கிடையாது. $\therefore f'(\alpha)\not>0$

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி 2: $f'(\alpha)<0$ என்க.

$\therefore f$ ஆனது $x=\alpha$ இடத்து இறங்குகிறது.

$\therefore h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}<0, 0<|h|<\delta.$

முன்போல், f-க்கு $x=\alpha$ இடத்து மீச்சிறுமமோ, மீப்பெருமமோ இல்லை எனக் காண்பிக்கலாம். $\therefore f'(\alpha) \nless 0$

$\therefore f'(\alpha)=0.$

குறிப்பு

(1) $x=\alpha$ இடத்து $f'(x)=0$ என்றால், $x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீப்பெருமமோ, மீச்சிறுமமோ இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

$f(x)=x^3$ என்க.

$f'(x)=3x^2$

$\therefore f'(0)=0$

$x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீப்பெருமம் இருக்க வேண்டுவதற்கு

$\begin{cases} h>0 \text{ என்றால் } h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}<0 \\ h<0 \text{ என்றால் } h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}>0 \end{cases}$ என்பவை நிபந்தனைகள்.

$\alpha=0$ என்றால், $h>0$ என்றால் $h\{f(h)-f(0)\}=h\{h^3-0\}=h^4 \nless 0.$

$\therefore x=0$ இடத்து f-க்கு மீப்பெருமம் இல்லை.

$x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீச்சிறுமம் இருக்க வேண்டுவதற்கு

$\begin{cases} h>0 \text{ என்றால் } h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}>0 \\ h<0 \text{ என்றால் } h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}<0 \end{cases}$

$\alpha=0$ என்றால், $h<0$-க்கு $h\{f(h)-f(0)\}$

$=h\{h^3-0\}=h^4>0$

அதாவது, $h^4 \ngtr 0$

$\therefore x=0$ இடத்து f-க்கு மீச்சிறுமம் இல்லை.

$\therefore f'(0)$ ஆனாலும், $x=0$ இடத்து f-க்கு மீப்பெருமமோ, மீச்சிறுமமோ, இல்லையே!

(2) $x=\alpha$ இடத்து மீப்பெருமமோ, மீச்சிறுமமோ இருக்கலாம்; ஆனால் $f'(\alpha)$ இருக்க வேண்டிய கட்டாயமில்லை;

விளக்க உதாரணம் இதோ :

$f(x)=|x|$ என்க.

$\therefore f(0)=0.$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)}{h}=\frac{|h|}{h}=\left.\begin{array}{r}1\\=-1\end{array}\right\}\begin{array}{l},\ h>0\\,\ h<0\end{array}$$

$\therefore\ Rf'(0)=1,\quad Lf'(0)=-1$

$\therefore\ f'(0)$ இல்லை.

தேற்றம் 2

f என்பது $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப் பட்டுள்ள சார்பு என்றும், $\alpha\in(a, b)$ என்றும்,

(i) $f'(\alpha)=f''(\alpha)=f'''(\alpha)=\cdots=f^{(n-1)}(\alpha)=0$ என்றும்

(ii) $f^{(n)}(\alpha)$ இருக்கிறதென்றும்

(iii) $f^{(n)}(\alpha)\neq 0$ என்றும் கொண்டால்,

n ஆனது ஒற்றை எண்ணென்றால் $x=\alpha$ இடத்து f-க்கு அசாதாரண மதிப்பு இல்லை என்றும்,

n ஆனது இரட்டை எண்ணென்றால், $f^{(n)}(\alpha)<0$-க்கு $x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீப்பெருமம் உண்டென்றும், $f^{(n)}(\alpha)>0$-க்கு $x=\alpha$ இடத்து f-க்கு மீச்சிறுமம் உண்டென்றும் நிறுவுக.

நிறுவல்

$f^{(n)}(\alpha)\neq 0$ என்பதால், $\varepsilon>0$ என்ற எண்ணை $f^{(n)}(\alpha)$-ன் குறிதான் $f^{(n)}(\alpha)-\varepsilon$; $f^{(n)}(\alpha)+\varepsilon$-க்கும் என்றவாறு எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$f^{(n)}(x)$ ஆனது $x=\alpha$ இடத்து இருப்பதால், $x=\alpha$ இடத்து, $f^{(n)}$ ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

(1) $\therefore\ 0\leq |h|<\delta\rightarrow f^{(n)}(\alpha)-\varepsilon<f^{(n)}(\alpha+h)<f^{(n)}(\alpha)+\varepsilon$ என்றவாறு $(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$ என்ற அண்மை இருக்கிறது.

டெய்லர் தேற்றத்தின்படி,

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=h\,f'(\alpha)+\frac{h^2}{2\,!}f''(\alpha)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\alpha)$$

$$+\frac{h^n}{n\,!}f^{(n)}(\alpha+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

(2) $$\therefore f(\alpha+h)-f(\alpha)=\frac{h^n}{n\,!}f^{(n)}(\alpha+\theta h)$$

$$\because\ f'(\alpha)=f''(\alpha)=\ldots=f^{(n-1)}(\alpha)=0$$

$\therefore$ (1)-லிருந்து,

$f^{(n)}(\alpha)-\varepsilon<f^{(n)}(\alpha+\theta h)<f^{(n)}(\alpha)+\varepsilon$

$\therefore$ $f^{(n)}(\alpha+\theta h)$-ன் குறிதான் $f^{(n)}(\alpha)$-ன் குறியும்; ஏனெனில், $f^{(n)}(\alpha)$-ன் குறிதான், $f^{(n)}(\alpha)-\varepsilon$, $f^{(n)}(\alpha)+\varepsilon$-ன் குறியும் என்பது தற்கோள்.

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி (1): n ஆனது இரட்டை எண் என்க.

$\therefore$ $h^n>0$.

$\therefore$ $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha+\theta h)$-ன் குறியானது $f^{(n)}(\alpha)$-ன் குறியே.

$\therefore$ (2)-லிருந்து, h நேரெண்ணோ, குறையெண்ணோ,

$(\alpha+h)-f(\alpha)$-ன் குறிதான் $f^{(n)}\alpha$-ன் குறியும்.

$f^{(n)}(\alpha)\neq 0$ என்பதால், $f^{(n)}(\alpha)<0$ ஆகவோ, $f^{(n)}(\alpha)>0$ ஆகவோ இருக்கலாம்.

இப்போது, $f^{(n)}(\alpha)<0$ என்றால், $f(\alpha+h)-f(\alpha)<0$.

$\therefore f$=க்கு $x=\alpha$ இடத்து மீப்பெருமம் உள்ளது.

இப்போது, $f^{(n)}(\alpha)>0$ என்றால், $f(\alpha+h)-f(\alpha)>0$.

$\therefore f$-க்கு $x=\alpha$ இடத்து மீச்சிறுமம் உள்ளது.

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி 2: n ஆனது ஒற்றை எண் என்க.

$\therefore \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha+\theta h)$ ஆனது ஒரே குறியுடன் இருப்பதில்லை;

ஏனெனில், $h<0$-க்கு $h^n<0$; $h>0$-க்கு $h^n>0$.

$\therefore$ (2)-லிருந்து, $0<|h|<\delta$ என்றால், $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ ஆனது ஒரே குறியுடன் இருப்பதில்லை.

அதாவது, $x=\alpha$ இடத்து, f-க்கு அசாதாரண மதிப்பு இல்லை.

குறிப்பு—ஒரு விளக்கம்

செயற்கூடு நிகழ்ச்சி 2-ல், $h<0$-க்கு $h^n<0$.

$f^{(n)}(\alpha)<0$ என்றால், $f^{(n)}(\alpha+\theta h)$-ம் <0.

$\therefore \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha+\theta h)<0$

$\therefore f(\alpha+h)-f(\alpha)>0$.

இப்போது $h>0$-க்கு, $h^n>0$.

$f^{(n)}(\alpha)<0$-க்கு, $f^{(n)}(\alpha+\theta h)<0$

$$\therefore \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha+\theta h)<0. \quad \therefore f(\alpha-h)-f(\alpha)<0$$

$\therefore 0<|h|<\delta$-ல் $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ ஆனது ஒரே குறியுடன் இருப்பதில்லை. $\therefore x=\alpha$ இடத்து f-க்கு அசாதாரண மதிப்பு இல்லை.

8·16. அணிகோவையின் வகைக்கெழு (Derivative of a Determinant)

உதாரணமாக,

$$g(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \end{vmatrix}$$

என்ற அணிகோவையை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$g'(x)=\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ \varphi_1(x) & \xi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) & \psi_3'(x) \end{vmatrix}$$

இது போன்று, $n\times n$ அணிகோவையை வகையிடலாம்.

கணக்குகள்

(1) $[a, b]$-ல் f, φ, ψ என்பவை இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை உறுதிப்படுத்துகின்றன என்றால்

$$\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix}=0 \text{ என்றவாறு}$$

(a, b)-ல் குறைந்தது ξ என்னும் புள்ளி ஒன்றுவது இருக்கிறதென நிறுவுக.

நிறுவல்

x ஆனது $[a, b]$-ல் யாதாமொரு புள்ளியெனில்,

$$g(x)=\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$$ என்பதைக் கருதுக.

$g(a)=0=g(b)$; ஏனெனில் அப்போது அணிகோவையில் இரு நிறைகள் சமமாயிருக்கும்.

$g(x)$-ன் விரித்தல் ஆனது $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$-ன் ஒருபடிச் சேர்மானமாக இருக்கும். f, φ, ψ என்பவை $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் இருத்தலின், g-ம் $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. மேலும், g ஆனது (a, b)-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கது.

$\therefore$ ரோல்ஸ் தேற்றப்படி, (a, b)-ல் குறைந்தபட்சம் ξ என்ற புள்ளியானது,

(i)… ..$g'(\xi)=0$ என்றவாறு இருக்கிறது.

ஆனால்,

$$g'(x)=\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f'(x) & \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}$$

ஏனெனில்,
$0=f'(a)=\varphi'(a)=\psi'(a)$
$=f'(b)=\varphi'(b)=\psi'(b)$

(ii)……
$$\therefore g'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix}=0,$$ (i)-ன்படி.

விளை முடிவு

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$ என்பதை அடையலாம்.

இது கோஷியின் இடைத் தேற்றமல்லவா?

$\psi(x)=k$ என்க.

$\therefore\ \psi(\xi)=k \quad \therefore \psi'(\xi)=0.$

∴ (ii) ஆனது

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & \varphi'(\xi) & 0 \\ f(b) & \varphi(b) & k \\ f(a) & \varphi(a) & k \end{vmatrix} = 0$$

∴ இதனை விரித்தால்,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad a<\xi<b.$$

(2) a, b, c என்ற எண்களின் மீச்சிறிய எண்ணிற்கும், மீப் பெரிய எண்ணிற்கும் இடையேயுள்ளவை α, β எனின்,

$k=\frac{1}{2}(b-c)(c-a)(a-b)$ எனின்

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} f(a) & f'(\alpha) & f''(\beta) \\ \varphi(a) & \varphi'(\alpha) & \varphi''(\beta) \\ \psi(a) & \psi'(\alpha) & \psi''(\beta) \end{vmatrix}$$

என நிறுவுக. மேலும்

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f''(\beta) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi''(\beta) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi''(\beta) \end{vmatrix} = \frac{2}{(c-a)(c-b)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

நிறுவல்

$a<b<c$ என்க. அதாவது, a ஆனது மீப்பெரியது, c ஆனது மீச்சிறியது.

∴ $[a, c]$-ல் f, φ, ψ, என்பவை தொடர்ச்சியுள்ளவை என்றும், (a, c)-ல் f'', φ'', ψ'' என்பவை இருக்கின்றன என்றும் கொள்க.

(i) $g(x) =$

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(x) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(x) \end{vmatrix} - \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

$g(a)=g(b)=g(c)=0$

∴ (a, b), (b,c)-ல் g ஆனது ரோல்ஸ் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகிறது.

∴ ரோல்ஸ் தேற்றப்படி, $g'(\xi)=g'(\eta)=0$,

$a<\xi<b,\ b<\eta<c$

இப்போது, f'', φ'', ψ'' இருப்பதால், g''-ம் (ξ,η)-ல் இருக்கிறது மேலும் $g'(\xi)=g'(\eta)$ என்பதால், (ξ,η)-ல் g'-க்கு ரோல்ஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

∴ (ξ,η)-ல் குறைந்த பட்சம் ஒரு புள்ளி β ஆனது,

(ii)......$g''(\beta)=0$, $\xi<\beta<\eta$ என்றவாறு இருக்கிறது.

(i)-ஐ இரு தடவை வகையிடலாம்.

(i)-ஐ ஒரு தடவை வகையிட,

$$g'(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi'(x) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi'(x) \end{vmatrix} = \frac{(x-a+x-b)}{(c-a)(c-b)}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

$$g''(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f''(x) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi''(x) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi''(x) \end{vmatrix} - \frac{2}{(c-a)(c-b)}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

$$g''(\beta)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f''(\beta) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi''(\beta) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi''(\beta) \end{vmatrix} - \frac{2}{(c-a)(c-b)}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

$=0$ (ii)-ன்படி.

$$\therefore \text{(iii)} \ldots \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f''(\beta) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi''(\beta) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi''(\beta) \end{vmatrix} = \frac{2}{(c-a)(c-b)}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

இப்போது

(iv) . . . $h(x)=$

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(x) & f''(\beta) \\ \varphi(a) & \varphi(x) & \varphi''(\beta) \\ \psi(a) & \psi(x) & \psi''(\beta) \end{vmatrix} - \frac{2(x-a)}{(c-a)(c-a)(b-a)}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

என்க.

இப்போது $h(a)=0=h(b)$

$f', \varphi'\ \psi'$ என்பவை $[a,b]$-ல் இருப்பதால், $[a, b]$-ல் h-க்கு ரோல்ஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

(v) . . . $\therefore h'(\alpha)=0$ என்றவாறு, α என்ற குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளியாவது, (a, b)-ல் இருக்கிறது.

(iv) லிருந்து, $h'(x)=$

$$\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) & f''(\beta) \\ \varphi(a) & \varphi'(x) & \varphi''(\beta) \\ \psi(a) & \psi'(x) & \psi''(\beta) \end{vmatrix} - \frac{2}{(c-a)(c-b)(b-a)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

$\therefore$ (v) ஆனது $h'(\alpha)=$

$$\begin{vmatrix} f(a) & f'(\alpha) & f''(\beta) \\ \varphi(a) & \varphi'(\alpha) & \varphi''(\beta) \\ \psi(a) & \psi'(\alpha) & \psi''(\beta) \end{vmatrix} - \frac{2}{(c-a)(c-b)(b-a)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix}$$

$=0$ என்றாகும்.

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(c) \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} f(a) & f'(\alpha) & f''(\beta) \\ \varphi(a) & \varphi'(\alpha) & \varphi''(\beta) \\ \psi(a) & \psi'(\alpha) & \psi''(\beta) \end{vmatrix}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

(குறிப்பு : து. கு. என்றால் துணைக் குறிப்பு (Hint).

(1) $f(x)=x^3 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$

$$=0, \quad x=0$$

என்றால் $f'(0)=0$ என நிறுவுக.

(து. கு.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin\frac{1}{h}-0}{h}$$

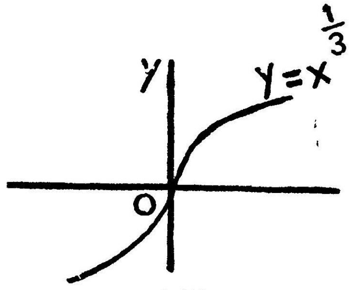
$$=\lim_{h\to 0} h^2 \sin\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h}=0\cdot 0=0.$$

(2) $f(x)=x^{1/3}$ என்றால் f ஆனது எல்லா x-க்கும் f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது என்றும், ஆனால் $x=0$ இடத்து f ஆனது வகைக்கெழு காணத் தக்கதல்ல என்றும் நிறுவுக.

(து. கு.

$$f'(x)=\frac{1}{3x^{2/3}}.$$

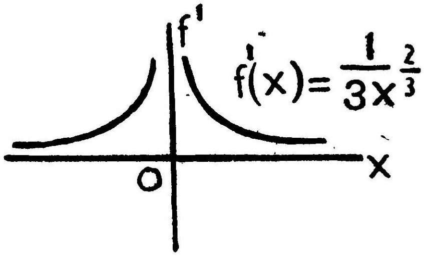
f ஆனது $x=0$ இடத்து முடிவில்லாத தொடர்ச்சியின்மையுள்ளது.



படம் 76

f-ன் வரைபடத்திற்கு $x=0$ ஆனது வளைவு மாற்றப் புள்ளி (point of inflexion) ஆகும்.

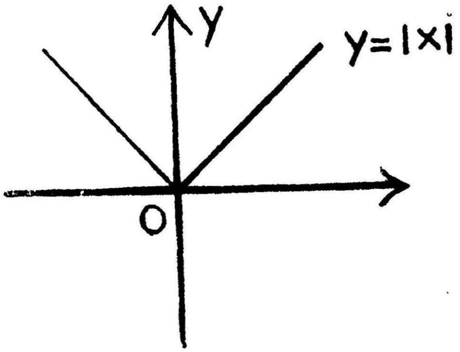
f' ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாயில்லை.



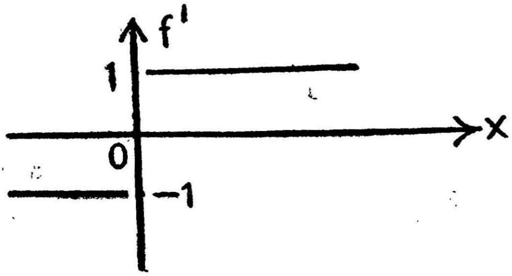
படம் 77

(3) $f(x) = |x|$ என்றால் எல்லா x-க்கும் f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளதென்றும், $x=0$ இடத்து f-க்கு மீச்சிறிய மதிப்பு என்றும், $x=0$ இடத்து f' இல்லை ($\therefore f'(0) \neq 0$) என்றும் நிறுவுக.

(து. கு.



படம் 78



படம் 79

f' ஆனது -1-லிருந்து $+1$-க்குத் தாவுகிறது.)

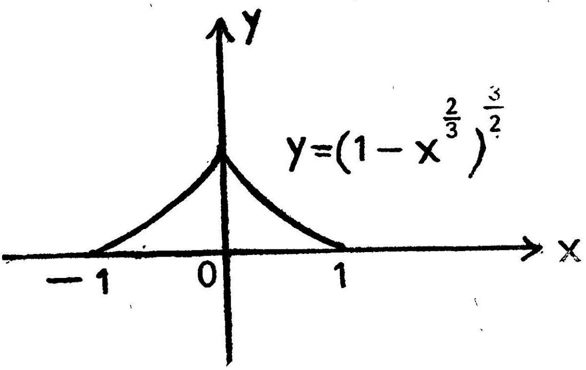
(4) $f(x) = (1-x^{2/3})^{3/2}$ என்றால் f-க்கு $x=0$ இடத்து வகைக்கெழு இல்லை என நிறுவுக. ஆனால் $x=0$ இடத்து f-க்கு மீப்பெருமம் உண்டெனக் காண்பிக்க.

(து. கு.

$$f'(x) = \frac{-(1-x^{2/3})^{\frac{1}{2}}}{x^{1/3}}$$

$x=0$ இடத்து f'-க்கு வகைக்கெழு இல்லை.

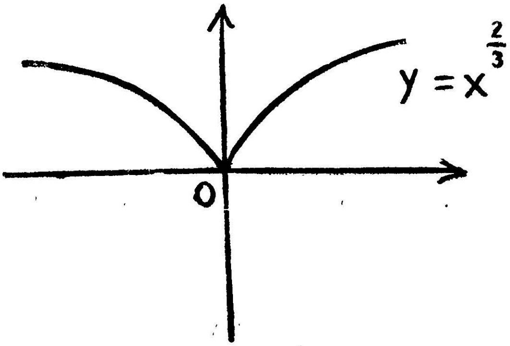
$f(0)=1;\quad f(x)<1,\quad x \neq 0$



படம் 80

(5) $f(x)=x^{2/3}$ என்றால், f ஆனது எல்லா x-க்கும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்றும், $x=0$-ஐத் தவிர மற்றெல்லா $x \gtrless 0$-க்கு f ஆனது வகைக்கெழு காணத்தக்கதென்றும் நிறுவுக.

(து· கு·



$Lf'(0)=-\infty$
$Rf'(0)=+\infty.$

படம் 81

(6) $f(x)=e^{-(1/x^2)}, x\neq 0$

$f(0)=0$

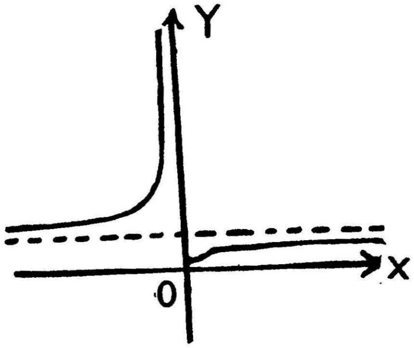
என்றால் ஒவ்வொரு x-க்கும் f-க்குத் தொடர்ச்சியான வகைக்கெழுக்கள் உண்டென நிறுவுக.

(7) $f(x)=e^{-(1/x)}, x\neq 0$

$=0, \quad x=0$

என்றால் எல்லா $x>0$-க்கு f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்றும், f-க்கு வகைக்கெழுக்கள் உண்டென்றும், ஆனால் $x=0$ இடத்து f-க்கு வகைக்கெழு இல்லையென்றும் காண்பிக்க.

(து. கு.



$Rf'(0)=0$

$Lf'(0)=\infty$.)

படம் 82

(8) $f(x)=x\tan^{-1}\frac{1}{x},\quad x\neq 0$

$=0,\qquad x=0$

என்றால் $x=0$ இடத்து f-க்கு வகைக்கெழு இல்லை எனக் காண்பிக்க.

(து.கு. $Rf'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{h\tan^{-1}\frac{1}{h}}{h}=\dfrac{\pi}{2}\qquad (h>0)$

$$Lf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-h\tan^{-1}\left(-\frac{1}{h}\right)}{-h}\qquad (h>0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{h}\right)=\tan^{-1}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

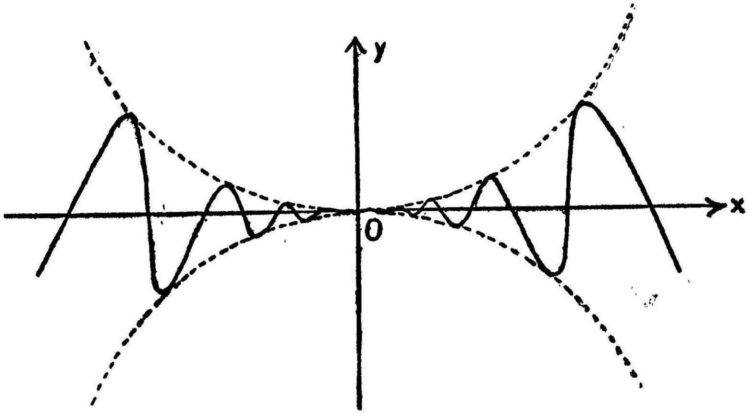
$Rf'(0)\neq Lf'(0)$.)

(9) $f(x)=x^2\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\qquad x\neq 0$

$=0,\qquad x=0$

என்றால், $x=0$ இடத்து f'-ன் (i) தொடர்ச்சி, (ii) வகைக்கெழு காணத்தக்கமை, (iii) $(-1, 1)$-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கமை ஆகியவற்றை ஆராய்க. $x=0$ இடத்து f'' உள்ளதா?

(து.கு. எல்லா x-க்கும், $x \gtrless 0$, f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. f' ஆனது எல்லா x-க்கும் உள்ளது.



படம் 83

ஆனால் $\lim_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$ என்பதால் f' ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் இல்லை. $\therefore$ $x=0$ இடத்து f'' இல்லை.

f-ன் வரைபடத்தில், ஆதியின் அண்மையில், $y=\pm x^2$ களுக்கு நடுவே முடிவில்லாமல் அலைவதை நோக்குக!)

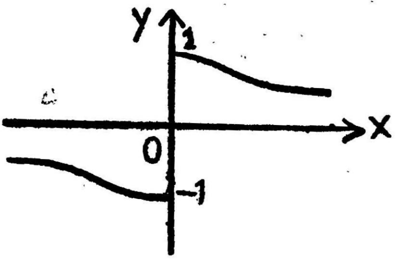
(10) $f(x)=x^2, \quad x \leqq 0$

$\quad = 1, \quad 0<x \leqq 1$

$\quad = \frac{1}{x}, \; x>1$

என்றால் $x=0$, $x=1$ ஆகிய இடங்களிடத்துத்தான் f-க்குத் தொடர்ச்சியில்லை யென்றும், அதனால் வகைக்கெழுக்கள் இல்லை யென்றும் நிறுவுக.

(11) $f(x)=\tan h\left(\frac{1}{x}\right)$ என்றால், $x=0$ இடத்து f-ன் வகைக்கெழு காணத்தக்கமையை ஆராய்க.



படம் 84

(து. கு. f ஆனது $x=0$ இடத்தைத் தவிர மற்றெல்லா இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1, \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

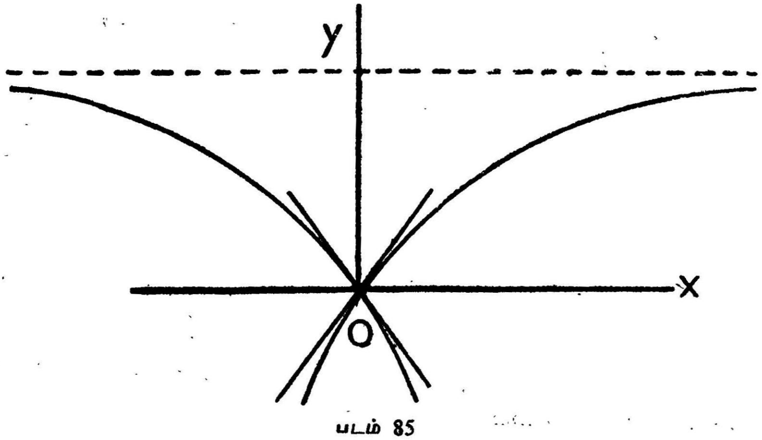
$\therefore$ f-க்கு $x=0$ என்பது "தாண்டும் அல்லது தாவும்" தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி. ஆனால் $Rf'(0)=Lf'(0)=0$ $\therefore$ $f'(0)$ உள்ளது.)

(12) $f(x)=|x+1|+|x|+|x-1|$ என்றால் f ஆனது $x=-1, 0, 1$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்றும், ஆனால் வகைக்கெழுக்கள் இல்லையென்றும் காண்பிக்க.

(13) $f(x)=x \tanh \frac{1}{x}, \ x\neq 0$

$\qquad =0, \qquad x=0$

என்றால் $f'(0)$ உள்ளதா?



படம் 85

(து. கு. எல்லா x-க்கும் f ஆனது தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. ஆனால் $x=0$ இடத்து f'-க்குத் தாவும் தொடர்ச்சியின்மை உள்ளது. $Rf'(0)=1,\ Lf'(0)=-1 \quad \therefore\ f'(0)$ இல்லை.)

(14) ஒரு புள்ளியிடத்து ஒரு சார்புக்கு முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள வகைக்கெழுக்கள் இருந்தால்மட்டும் போதாது. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$ என்றால்தான் டெய்லர் தொடரானது கொடுத்த சார்பைக் குறிக்கும். இதனை,

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}},\quad x\neq 0$$
$$=0,\quad x=0$$

என்றவாறு உள்ள சார்பைக்கொண்டு விளக்குக.

(து. கு. $R\,f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{-(1/h^2)}}{h}=0\ (h>0)$

$$L\,f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-(1/h^2)}}{-h}=0\ (h>0)$$

$$\therefore\ R\,f'(0)=L\,f'(0)=0=f'(0)$$

மேலும், $x\neq 0,\ f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-(1/x^2)}$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^3}e^{-(1/x^2)}\right)$$
$$=0$$
$$=f'(0)$$

$\therefore\ f'$ ஆனது $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

இதேபோல், $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0} f''(x)$ எனக் காண்பிக்கலாம். அதாவது, f'' ஆனதும் $x=0$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. இப்படியே தொடர்ந்தோமானால், $f^{(3)},\ f^{(4)},\ \ldots\ldots f^{(n-1)}$-ஐக் கண்டுபிடித்தோமானால், $\left\{\dfrac{e^{-(1/x^2)}}{(x\text{-ல் பல்லுறுப்பு})}\right\}$ வந்துகொண்டே இருக்கும்.

$$f^{(3)}(0)=f^{(4)}(0)=\ldots\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$$

$\therefore$ $x=0$ என்ற புள்ளியிடத்து f-க்கு வகைக்கெழுக்கள் இருக்கின்றன. $\forall n, f^{n}(0)=0$

ஆனால், $\lim_{n \to \infty} R_n(x) \neq 0$. ஏனெனில் $e^{-(1/x^2)} \to 0$.

ஆகையால் $f(x)= e^{-(1/x^2)}$ என்பது டெய்லர் தொடராக எழுத முடியாது.

முக்கியக் குறிப்பு

மெக்ளாரின் தொடராக மேற்கண்ட $f(x)$-ஐ எழுதினால்,

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

$$=0+x\cdot 0+\frac{x^2}{2!}\,0+\ldots+\frac{x^n}{n!}\cdot 0+\cdots$$

இஃது (மெக்ளாரின்) $x \neq 0$-க்கு உண்மையல்ல.

(15) f ஆனது $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதென்றும், f'', $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதென்றும், (a, b)-ல் $f'''(x)$ இருக்கிறதென்றும் கொண்டால்,

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(\xi)$$ என்ற

வாறு (a, b)-ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி ξ இருக்கிறது என நிறுவுக.

(16) $h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ \varphi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$ என்றால்

$$h'(x)=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ \varphi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}$$

என நிறுவுக.

(17) தகுந்த நிபந்தனைகளின் கீழ், (a, b)-ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி ξ ஆனது,

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ \varphi(a) & \varphi(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f'(a) & f'(\xi) \\ \varphi(b) & \varphi'(\xi) \end{vmatrix}$$

என்றவாறு இருக்கிறதெனக் காண்பிக்க.

(து கு. $g(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ \varphi(a) & \varphi(x) \end{vmatrix}-\frac{x-a}{b-a}\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ \varphi(a) & \varphi(b) \end{vmatrix}$ என்க.)

9. பலமாறிச் சார்புகள்
(Functions of Several Variables)

9·1. முன்னுரை

இதுவரை தெளிவாகவும், விரிவாகவும் ஒரே ஒரு சாராமாறி (Independent variable)யுடைய சார்புகளை ஆராய்ந்தோம். இப்போது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட சாராமாறிகளையுடைய சார்புகளின் பண்புகளைக் காண்போம்; அவற்றின் எல்லை, தொடர்ச்சி, சீரான தொடர்ச்சி, வகையிடத் தக்கமை (Differenti bi-lity), வகைக்கெழு காணத்தக்கமை (Derivability) ஆகிய பண்புகளை ஆராய்வோம்.

பலமாறிச் சார்புகளுக்கு உதாரணங்கள்

(1) நீளம் x, அகலம் y உடைய செவ்வகத்தின் பரப்பைத் தரும் வாய்பாடு $A=xy$ என்பதாகும்.

x, y-ன் ஒவ்வொரு ஜோடி மதிப்புகளுக்கும், பரப்பு A-க்கு ஒரு மதிப்புதான் உண்டு. இங்கே A என்பது x, y ஆகிய இரு மாறிகள் சார்பு ஆகும்.

(2) செவ்வக இணைகரத் திண்மம் (Rectangular Parallelopiped) ஒன்றின் விளிம்புகளின் அளவுகள் x, y, z என்றும், அதன் பருமம் (Volume) V என்றும் கொண்டால்,

$V=xyz$ என்பது வாய்பாடு.

இங்கே V ஆனது x, y, z என்ற மூன்று மாறிகள் சார்பு ஆகும்.

9·2. வரை இலக்கணம்—இரு சாராமாறிகள் சார்பு (Function of Two Independent Variables)

D என்ற ஒரு வெளியில் x, y என்பவை யாதாமிரு சாராமாறிகள் என்றால், ஒவ்வொரு ஜோடி (x, y)-க்கும் ஏற்ப ஒரு குறிப்பிட்ட

கணியம் z இருந்தால், z-ஐ இரு சாராமாறிகள் x, y-ன் சார்பு என் போம்.

$z=f(x, y)$, $z=\varphi(x, y)$, $z=\psi(x, y)$, ... என்பன போன்ற குறி யீடுகளால் இரு சாராமாறிகள் சார்பை வழங்கலாம்.

வரை இலக்கணம் : இரு சாராமாறிகள் சார்பின் வரையறை அரங்கம் (Domain of Definition of Function of Two Variables)

$z=f(x, y)$ என்ற இரு சாராமாறிகள் சார்புக்கு ஏற்ற ஜோடி கள் (x, y) அமைக்கும் கணத்திற்கு இரு சாராமாறிகள் சார்பின் வரையறை அரங்கம் என்று பெயர்.

வடிவகணித வழி (Geometrically) மேற்கண்ட வரையிலக் கணம் நன்கு புலனாகும். உதாரணமாக xy-தளத்தில் (x, y) என்ற ஒவ்வொரு ஜோடி ஒவ்வொரு புள்ளி $P(x, y)$-ஐக் குறிக்குமானால், இரு சாராமாறிச் சார்பின் வரையறை அரங்கமாவது, இப் புள்ளி கள் அமைக்கும் கணமாகும். குறிப்பாக xy-தளம் முழுமையுமே இச்சார்பின் வரையறை அரங்கமாகும்.

இதனையே இன்னும் விளக்குவோம். x ஆனது (a, b) இடை வெளியில் யாதாமொரு புள்ளி என்றும், y ஆனது (c, d) இடை வெளியில் யாதாமொரு புள்ளி என்றும் கொள்க. x-ஐச் சார்ந்து y இல்லை; y-ஐச் சார்ந்து x இல்லை என்று வைத்துக்கொள்வோம். இப்போது வரிசைப்பட்ட ஜோடிகள் (x, y) கிடைக்கின்றன. ஒவ் வொரு வரிசைப்பட்ட ஜோடி (x, y)-க்கும் ஏற்ப z என்ற மதிப்பு இருக்குமானால், (x, y)கள் அமைக்கும் கணத்தைத்தான் z-ன் வரை யறை அரங்கம் என்போம். இவ் வரையறை அரங்கத்தை $D(a, b; c, d)$ என்று குறியிடுவது வழக்கம். இவ்வரங்கம் நீள் செவ்வக மாகவோ, சதுரமாகவோ, வட்டமாகவோ அல்லது வேறு ஏதா வது மேற்பரப்பாகவோ (surface) இருக்கலாம்.

உதாரணங்கள்

(1) $z=4x+y$ என்ற சார்பின் வரையறை அரங்கம் xy தளம் முழுமையுமே. ஏனெனில் எல்லா x, y-க்கும் $4x+y$ இருக்கிறது.

(2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ என்ற சார்பைக் கருதுக. z-க்கு மெய் யான (Real) மதிப்பு இருக்க வேண்டுமானால் $4-x^2-y^2$ ஆனது நேர் ஆக இருக்க வேண்டும். அதாவது, $4-x^2-y^2 \geq 0$, அல்லது, $x^2+y^2 \leq 4=2^2$. இந்தச் சமனின்மையை உறுதிப்படுத்தும் வரிசைப் பட்ட ஜோடிகள் (x, y) ஆனவை xy-தளத்தில் புள்ளிகளாகக் கருதப்

பட்டால், இப்புள்ளிகள் ஆதி(origin)யை மையமாகவும், ஆரை 2 ஆகவும் உடைய வட்டத்தின் எல்லை(boundary)யிலும் அவ் வட்டத்தின் உட்பரப்பிலும் உள்ளன.

(3) ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் x என்றும், இதற்கு ஒத்த குத்துயரம் (altitude) y என்றும் முக்கோணத்தின் பரப்பு A என்றும் கொண்டால்,

$A=\frac{xy}{2}$ என்பது வாய்பாடு.

x, y-க்களின் எந்த மெய் மதிப்பு (நேரோ, குறையோ, பூச்சியமோ Positive or negative or zero)க்கும் xy இருக்கிறதென்றால் A-யின் இயற்கையான வரையறை அரங்கம் (natural domain) ஆனது xy தளத்தின் முழுமையுமாகும். ஆனால் x-ம், y-ம் நீளங்கள் ஆனவையால், இவற்றின் மதிப்புகள் பூச்சியமாகவோ, குறையாகவோ இருக்க முடியாது. $\therefore$ $x>0, y>0$ என்பதுதான் சரி. $\therefore$ A சார்பின் வரையறை அரங்கம்: $x>0$, $y>0$. இவ்வரையறை அரங்கம் ஆனது இயற்கை வரையறை அரங்கத்துடன் ஒருங்கிசை வாக (Identical) இல்லை.

பயிற்சி

$z=\log(x+y)$ என்றால் z-ன் வரையறை அரங்கம் $y=-x$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேலாக அமைந்திருக்கும் அரைதளம் (half plane) என்றும், இந்த நேர்க்கோடு, வரையறை அரங்கத்தில் சேராது என்றும் காண்பிக்க.

(உதவிக் குறிப்பு—Hint: நேர் எண்களுக்குத்தான் log வரையறுக்கப்படுவன. $\therefore$ $x+y>0$ அதாவது $y>-x$. $x+y=0$ என்றால் log 0 முடிவுற்றது.)

வரை இலக்கணம்—பல மாறிச் சார்புகள் (Function of Several Variables): $x, y, z, \ldots, u, t$ என்ற சாராமாறிகளின் ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் ஏற்ப குறிப்பிட்ட மதிப்புள்ள மாறி w இருக்குமாயின், w ஆனது $x, y, z, \ldots, u, t$ என்ற பல சாராமாறிகளின் சார்பு எனப்படும்.

குறியீடு

$w=f(x, y, z, \ldots u, t)$ அல்லது, $w=\varphi(x, y, z, \ldots u, t)$

இருமாறிச் சார்புகளைப் போலவே, பலமாறிச் சார்புகளின் வரையறை அரங்கத்தையும் வரையறுக்கலாம். வடிவகணித வழி, மூன்று சாராமாறிகள் சார்பு ஒன்றின் வரையரங்கமாவது, (x,y,z)

என்ற மும்மைகள் அமைக்கும் ஒரு கணம். ஒவ்வொரு மும்மை (x,y,z)-ம் xyz-வெளியில் $P(x,y,z)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்குமென்றால், இப்புள்ளிகளின் ஒரு கணத்தைச் சார்பின் வரையறை அரங்கம் என்போம். இதுபோல், $u=f(x,y,z,t)$ என்ற நான்கு சாரா மாறிகள் சார்பின் வரையறை அரங்கமாவது (x,y,z,t) என்ற நான்குகளின் ஒரு கணம் என்போம்.

உதாரணங்கள்

(1) செவ்வக இணைகரத் திண்மத்தின் பருமத்தின் வாய்பாடு $V=xyz$ அல்லவா? V என்பது மூன்று சாராமாறிகள் சார்பு ஆகும்.

(2) $w=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-u^2}$ என்றால் w ஆனது x,y,z,u என்ற நான்கு சாராமாறிகளின் சார்பு ஆகும். w ஆனது மெய்யாக இருக்க வேண்டுமென்றால், $1-x^2-y^2-z^2-u^2 \geq 0$. இந்தச் சமனின்மை ஆனது w-ன் வரையறை அரங்கத்தை நிர்ணயிக்கிறது.

9·3. இரு மாறிச் சார்பின் வடிவகணித விளக்கம் (Geometric Representation of a Function of Two Variables)

$$(1) \quad z=f(x,y)$$

என்ற இரு மாறிச் சார்பைக் கருதுக.

z-ன் வரையறை அரங்கமானது xy தளத்தின் முழுமை என்க. வேண்டுமானால் xy-தளத்தில் ஒரு மூடிய வளைவை (closed curve) எடுத்துக் கொள்க. O என்பதை ஆதியாகவும், Ox, Oy, Oz-ஐச் செவ்வக கார்டீசியன் (Rectangular Cartesian) அச்சுக்களாகவும் கொண்ட தளத்தைக் கருதுக. xy-தளத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளி (x, y) இடத்து xy தளத்திற்குச் செங்குத்துக் கோடு வரைக. இச் செங்குத்துக் கோட்டில் $f(x, y)$ மதிப்புக்குச் சமமான நீளம் உடைய துண்டைக் குறித்துக் கொள்க. இப்போது $x, y, f(x, y)$ என்ற ஆயக்கூறுகளையுடைய புள்ளி P கிடைக்கின்றது; அதாவது $P(x,y,z)$-ஐப் பெறுகின்றோம்.

இப்போது சமன்பாடு (1)-ஐ உறுதிப்படுத்தும் ஆயக்கூறுகளை உடைய புள்ளிகள் P-ன் நியமப் பாதைதான், **இருமாறிச் சார்பின் வரைபடம் (graph of the function of two variables)** ஆகும்.

(1) ஆனது வடிவகணிதத்தில், வெளி(space)யில் மேற்பரப்பு (surface) ஒன்றைக் குறிக்கும் என்றால், இருமாறிச் சார்பின் வரைபடமாவது, சார்பின் வரையறை அரங்கத்தில் xy-தளத்தில் மேற்பரப்பு (1)-ன் வீச்சு (projection) ஆகும்.

xy-தளத்திற்குச் செங்குத்தான எந்த நேர்க்கோடும் $z=f(x,y)$ என்ற மேற்பரப்பை ஒரு புள்ளிக்குமேல் வெட்டுவதில்லை.

உதாரணமாக, $z=x^2+y^2$ என்பது "சுற்றுப் பரவளைவுரு" (Paraboloid of revolution) ஆகும்.

9·4. ஒரு சார்பின் பகுதிச் சிறு ஏற்றமும் (Partial Increment), மொத்தச் சிறு ஏற்றமும் (Total Increment)

(1) $\cdots\ z=f(x, y)$ என்ற இருமாறிச் சார்பைக் கருதுக. இது ஒரு மேற்பரப்பைக் குறிக்கும் என்றோம். இப்போது xz-தளத்திற்கு இணையாக $y=k$ (மாறிலி) என்ற தளம் மேற்பரப்பு (1)-ஐ l என்ற வளைகோட்டில் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

$y=k$ தளத்தில் y ஆனது மாறாமல் இருப்பதால், z ஆனது வளைகோடு l-ல் x-ஐச் சார்ந்து மாறிக்கொண்டிருக்கும். சாராமாறி x-க்கு Δx என்ற சிறு ஏற்றத்தைக் கொடுக்கவும். அப்படியானால் zம் ஏறும். z-ன் இந்த ஏற்றம் y-ஐப் பொறுத்த தல்ல; x-ஐப் பொறுத்ததே. இந்த z-ன் ஏற்றத்தை, "x-ஐப் பொறுத்த z-ன் பகுதி ஏற்றம்" (partial increment of z with respect to x) என்போம். இதனை $\Delta_x z$ என்று குறியிடுவர்.

(2) $\therefore \Delta_x z= f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$

இதுபோல் yz-தளத்திற்கு இணையான $x=$மாறிலி என்ற தளத்தைக் கருதினால்,

(3) $\Delta_y z=f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$

என்றெழுதலாம். இங்கே x மாறவில்லை.

இப்போது ஒரே சமயத்தில் x-க்கு Δx என்ற ஏற்றத்தையும், y-க்கு Δy என்ற ஏற்றத்தையும் அளித்தோமானால், z-க்கு Δz என்ற புது ஏற்றத்தை அடைகிறது. இந்த Δz-ஐ "மொத்த ஏற்றம்" என்போம். இந்த மொத்த ஏற்றமானது,

(4) $\Delta z= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$

என்ற சமன்பாட்டினால் பெறப்படும். இங்கே x, y இரண்டுமே மாறுவதை நோக்குக.

மேலும், $\Delta z \neq \Delta_x z+\Delta_y z$.

உதாரணமாக, $z=xy^2$ என்றால்

$$\Delta_x z=(x+\Delta x)y^2-xy^2=y^2\,\Delta x,$$

$$\Delta_x z = x(y+\Delta y)^2 - xy^2 = 2xy\ \Delta y + x\,(\Delta y)^2,$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)\ (y+\Delta y)^2 - xy^2 = 2xy\ \Delta y + x(\Delta y)^2 + y^2\ \Delta x + \Delta x\ (\Delta y)^2$$

9·5. பலமாறிச் சார்பின் அண்மை (Neighbourhood of a Function)

வரை இலக்கணம்

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ என்ற சமனின்மையை உறுதிப் படுத்தும் எல்லாப் புள்ளிகள் (x, y)-களின் கணமானது, (x_0, y_0) என்ற புள்ளியின் ஆரை δ உடைய அண்மை எனப்படும்; அதாவது, (x_0, y_0) என்ற புள்ளியை மையமாகவும், ஆரை r ஆகவும் உடைய வட்டத்தினுள் இருக்கும் எல்லாப் புள்ளிகளும் அமைக்கும் கணமாகும்.

ஒரு சார்பு $f(x, y)$ ஆனது (x_0, y_0) என்ற புள்ளியின் அண்மையில் ஒரு பண்பைப் பெற்றிருக்கிறது என்றால், (x_0, y_0) என்ற புள்ளியை மையமாகவுடைய வட்டத்தினுள் இருக்கும் எல்லாப் புள்ளிகளிடத்து அச்சார்பு அந்தப் பண்பைப் பெற்றிருக்கின்றது என்று பொருள்.

மாற்று வரை இலக்கணம்

$R(a, b; c, d)$ என்ற $f(x, y)$-ன் வரையறை அரங்கத்துள் (x,y) என்பது யாதாமொரு புள்ளியென்றால் $R(a, b; c, d)$ என்ற செவ்வகத்துள் முழுவதும் உள்ளடங்கியிருக்கும் $N(x-\delta_1, x-\delta_2; y-\delta_1', y-\delta_2')$ என்ற செவ்வகமானது $f(x, y)$-ன் (x, y)-ன் அண்மை எனப்படும்.

யாதாமொரு $\delta>0$ என்றால், (x, y)-ன் அண்மையை $(x-\delta, x+\delta; y-\delta, y+\delta)$ என்ற சதுரமாக எடுத்துக்கொள்வது வழக்கம்.

9·6. இரட்டை அல்லது ஒருங்கை எல்லை (Double or Simultaneous Limit)

வரை இலக்கணம்

$z=f(x, y)$ என்ற சார்பின் வரையறை அரங்கம், xy தளத்தின் ஏதோ ஒரு கணம் G என்க. G-யிலோ, G-ன் எல்லையிலோ $M_0(x_0, y_0)$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியென்க. ஒவ்வொரு $\varepsilon>0$-க்கு ஒத்த ஒரு $\delta>0$ ஆனது, எல்லாப் புள்ளிகள் $M(x,y)$-க்கு, $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \rightarrow |f(x, y)-l| < \varepsilon$ என்றவாறு இருந்

தால், $M(x, y)$ ஆனது $M(x_0, y_0)$-ஐ அணுகும்போது $f(xy)$-ன் எல்லை l எனப்படும். ஆகையால், $M(x, y) \to M(x_0, y_0)$ என்னும் போது, l ஆனது $f(x, y)$-ன் எல்லை என்றால்,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$$ என்று எழுதுகிறோம்.

கவனிக்க

மேற்கண்ட வரை இலக்கணத்தில்,

"$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$" என்பதை,

"$0 < |x-x_0| < \delta,\ 0 < |y-y_0| < \delta$" என்றும் எழுதலாம்.

மாற்று வரை இலக்கணம்

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}} f(x, y) = \underline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$$

என்றால் $f(x, y)$-க்கு (x_0, y_0) இடத்து ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லை இருக்கிறது. இவ்வெல்லை முடிவுள்ளதாகவோ முடிவற்றதாகவோ இருக்கலாம்.

9·7. முக்கியமான குறிப்பு

கணக்குகளில் எல்லையைக் காண வழி

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$ என்றும், $x \to x_0$ என்னும் போது $\psi(x) \to y_0$ என்றவாறு

$y = \psi(x)$ இருந்தால்,

$$\lim_{x \to x_0} f[x, \psi(x)] = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$$

ஆனால், $y = \psi_1(x)$, $y = \psi_2(x)$ என்ற இரு வெவ்வேறு சார்புகளுக்கு ஏற்ப, $f[x, \psi_1(x)]$, $f[x, \psi_2(x)]$-களுக்கு வெவ்வேறு எல்லைகள் இருக்குமானால், $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ இல்லை என்று பொருள்.

உதாரணங்கள்

(1) $f(x, y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, $x>0$, $y>0$ என்றால்

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ இல்லை எனக் காண்பிக்க.

விடை : $y=mx$ என்று கொள்க.

$x\to 0$ என்றால், $y\to 0$ என்பதும் உண்மை.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x-mx}{x+mx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-m}{1+m}=\frac{1-m}{1+m}$$

இது m-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறாய் மாறும்.

$\therefore f(x, y)$-க்கு $x\to 0$, $y\to 0$-க்கு எல்லை இல்லை.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[\dfrac{x\,y^4}{x^2+y^8}\right]$ இல்லை எனக் காண்பிக்க.

விடை : $x=my^4$ என்க.

$y\to 0$-க்கு $x\to 0$ என்பது உண்மை.

$$\therefore \lim_{y\to 0} f(my^4, m)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{my^4 .\, y^4}{(my^4)^2+y^8}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{my^8}{m^2y^8+y^8}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{m}{m^2+1}=\frac{m}{m^2+1}$$

இஃது, வெவ்வேறு m-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புடையது.

(3) $f(x, y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\,\sin\dfrac{1}{y}$, $x>0, y>0$

என்றால் $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ என்ன ?

$(x, y)\to(0, 0)$ என்பதால் $x\to 0$, $y\to 0$

$\therefore\ 0<x<\varepsilon,\ 0<y<\varepsilon$ என்க.

$$\therefore \left| f(x,y) \right| < \left| (\varepsilon+\varepsilon) \sin\frac{1}{\varepsilon} \sin\frac{1}{\epsilon} \right| = \left| 2\varepsilon \sin^2\frac{1}{\varepsilon} \right|$$

$$<2\varepsilon, \because \left| \sin\frac{1}{\varepsilon} \right| \leq 1$$

அதாவது, $| f(x,y)-0 | < 2\varepsilon$

$\therefore$ வரை இலக்கணம் 9·6-ன்படி $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

பயிற்சி

(1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ என்றால்

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)]$ என்ன ?

(**குறிப்பு** : $y=mx$ எனக் கொண்டால்,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0,\ \forall m.$$

$\therefore$ 9·7 படி, வேண்டிய எல்லை=0.)

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)$ என்ன?

(**குறிப்பு** : $y=mx$ என்றால், $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot mx}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{2m}{1+m^2}$

$\therefore$ எல்லை இல்லை.)

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ இல்லை எனக் காண்பிக்க.

(**குறிப்பு**: $x=my^2$ என்றால், $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{my^2\cdot y^2}{m^2y^4+y^4} = \dfrac{m}{1+m^2}$

$\therefore$ எல்லை இல்லை.)

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[(x+y)\cdot \dfrac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2} \right]$ என்ன ?

(குறிப்பு : $y=mx$ என்றால்

$$\lim_{x\to 0}\left[(m+1)\cdot\frac{m+(m+1)^2}{m-(m+1)^2}\right]$$ என்று அடைவோம்.

$m=1$-க்கு இவ்வெல்லை $=-\frac{10}{3}$,

$m=2$-க்கு இவ்வெல்லை $=-\frac{11}{21}$

∴ வேண்டிய எல்லை இல்லை.)

(5) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(y\sin\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{y}\right)=0$ என நிறுவுக.

(குறிப்பு: $0<x<\epsilon$, $0<y<\varepsilon$ என்றால், (ஏன்?)

$$\left|f(x,y)\right|<\left|\varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon}\right|=\left|2\varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon}\right|<2\varepsilon.)$$

9·8. அடுக்கடுக்கு எல்லைகள் (Repeated Limits)

(x_0, y_0)-ன் அண்மையில் வரையறுக்கப் பட்டுள்ள சார்பு $z=f(x,y)$ என்க. $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ இருந்தால் அது x-ஐப் பொறுத்த சார்பு

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\psi(x) \text{ என்க.}$$

$\lim_{x\to x_0}[\psi(x)]=k$ (முடிவுள்ளது அல்லது முடிவில்லாதது) என்றால் $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}[f(x,y)]=k$ என்றெழுதுவோம். இவ்வெல்லைக்கு, (x_0, y_0). புள்ளியிடத்து $f(x,y)$-க்கு அடுக்கடுக்கு எல்லை என்று பெயர்.

பொதுவாக, $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}[f(x,y)]\neq\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}[f(x,y)]$

அடுக்கடுக்கு எல்லைகள் $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}[f(x,y)]$-ம்,

$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}[f(x,y)]$-ம் சமமாக இருப்பினும், இரட்டை எல்லை

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x, y)]$ இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை; இருந்தாலும் இருக்கலாம்.

ஆனால் $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to x_0}} [f(x, y)]$ இருந்தால் இரண்டு அடுத்தடுக்கு எல்லைகளும் இருக்கும்; இவற்றின் மதிப்பு ஆனது இரட்டை எல்லைக்குச் சமம். அடுக்கடுக்கு எல்லைகள் சமமில்லை யெனின், இரட்டை எல்லை இல்லை.

உதாரணம்

$f(x, y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, $x>0$, $y>0$ என்றால் $(0, 0)$ இடத்து $f(x, y)$-ன் அடுக்கடுக்கு எல்லைகள், இரட்டை எல்லை இருக்கின்றனவா என்று ஆராய்க.

விடை

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-0}{x+0}\right)=\lim_{x\to 0} 1=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y}{0+y}\right)=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$$

$y=mx$ எனக்கொண்டால்,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-mx}{x+mx}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-m}{1+m}=\frac{1-m}{1+m};$$ இஃது, வெவ்வேறு m-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புடையது. $\therefore f(x, y)$-க்கு இரட்டை எல்லை இல்லை. (கவனிக்க : அடுக்கடுக்கு எல்லைகள் சமமில்லை யென்பதால், இரட்டை எல்லை இல்லை என்று முடிவு செய்யலாம்.)

பயிற்சி

$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ என்றால் f-க்கு $(0, 0)$ இடத்து அடுக்கடுக்கு எல்லைகள், இரட்டை எல்லை இருக்கின்றனவா என்று ஆய்க.

(குறிப்பு: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{0+(0-y)^2}\right)=0$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{0+(x-0)^2}\right)=0.$$

$y=x$ என்பதை எடுத்துக்கொண்டு இரட்டை எல்லை இல்லை என்று காண்பிக்க.)

9·9. இருமாறிச் சார்புகளின் தொடர்ச்சி (Continuity of a Function of Two Variables)

வரை இலக்கணம்

$f(x, y)$-ன் வரையறை அரங்கத்துள் $M(x_0, y_0)$ என்பது குறிப்பிட்ட புள்ளி என்க. இவ்வரையறை அரங்கத்துள்ளே இருந்து கொண்டு, $M(x, y)$ ஆனது $M(x_0, y_0)$-ஐ எப்படி வேண்டுமானாலும் அணுகட்டும்.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$$ என்றால்

$z=f(x, y)$ ஆனது $M(x_0, y_0)$ இடத்து தொடர்ச்சியாயுள்ளது என்போம்.

இதனையே, $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0, y_0)$$

அதாவது, $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)]=0$$

என்றும் எழுதலாம்.

அதாவது, $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0$$

$\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ என்றால், $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ என்னும் போது, $\Delta\rho\to 0$. அதேபோல், $\Delta\rho\to 0$ என்றால், $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$

$\therefore \lim_{\Delta\rho\to 0} \Delta z=0$ என்றும் எழுதலாம்.

மாற்று வரை இலக்கணம்

$\varepsilon>0$-க்கு, ஒரு $\delta>0$ ஆனது,

$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<\delta\to |f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)|<\varepsilon$ என்றவாறு இருந்தால் $f(x, y)$ ஆனது (x, y) இடத்துத் தொடர்ச்சியாய்

உள்ளதென்போம். ஏதாவதொரு அரங்கத்து ஒவ்வொரு புள்ளியிடை, ஒரு சார்பானது தொடர்ச்சியாய் இருந்தால் அச்சார்பு அவ்வரங்கத்தில் தொடர்ச்சியாயுள்ளதென்போம்.

தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி (Point of Discontinuity)

யாதாமொரு புள்ளி $P(x_0, y_0)$ இடத்து,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0) \text{ என்றால்,}$$

$P(x_0, y_0)$ ஆனது $z=f(x, y)$ என்ற சார்புக்குத் "தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி" எனப்படும்.

கீழ்க்கண்ட நிகழ்ச்சிகளிலும் $P(x_0, y_0)$ ஆனது $z = f(x, y)$-க்குத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளியாக அமையும்; அவையாவன :

(1) $P(x_0, y_0)$ என்ற புள்ளியைத்தவிர, $P(x_0, y_0)$-ன் ஒரு அண்மையில் $z=f(x, y)$ ஆனது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(2) $P(x_0, y_0)$-ன் அண்மையில் எல்லாப் புள்ளிகளிடத்தும் $z = f(x, y)$ ஆனது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால் $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ இல்லை.

(3) $P(x_0, y_0)$-ன் அண்மையில் எல்லாப் புள்ளிகளிடத்தும் $z=f(x,y)$ ஆனது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$-ம் இருக்கிறது.

ஆனால் $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$.

உதாரணமாக,

$z=x^2+y^2$ என்ற இருமாறிச் சார்பு ஆனது எல்லா x, y-க்கும் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

ஏனெனில் $\Delta z = [(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2] - [x^2+y^2]$
$= 2x\,\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

மற்ருெரு உதாரணம்

$$z=\frac{2xy}{x^2+y^2}, (x, y)\neq(0, 0)$$ என்ற சார்பைக் கருதுக.

$y=mx$ என்ருல்,

$$z=\frac{2x\,mx}{x^2+m^2x^2}=\frac{2m}{1+m^2}$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=\frac{2m}{1+m^2}$$

இஃது ஒவ்வொரு m-க்கும் வெவ்வேறு மதிப்புப் பெறுகிறது. அதாவது ஆதி(origin)யை வெவ்வேறு நேர்கோடுகள் வழி நெருங்க z-க்கு எல்லை இல்லை. ∴ ஆதியானது z-க்குத் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி ஆகும்.

பயிற்சி

(1) $f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ என்ருல் $f(x,y)$-க்கு (0, 0) இடத்து முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியின்மை உள்ளதெனக் காண்பிக்க.

(2) $f(x, y)=\frac{1}{x-y}$ என்ருல் $f(x, y)$ ஆனது $x=y$ நேர்க் கோடு வழி தொடர்ச்சியின்மையாய் உள்ளதெனக் காண்பிக்க.

(3) $$\begin{cases} f(x, y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^3}, (x, y)\neq(0, 0) \\ f(0, 0)=0 \end{cases}$$

என்ருல் $f(x, y)$ ஆனது (0, 0) இடத்துத் தொடர்ச்சியின்மையாய் உள்ளதெனக் காண்பிக்க.

(4) $$\begin{cases} f(x, y)=\dfrac{e^{-|x-y|}}{x^2-2xy+y^2}, (x,x)\neq(x,y) \\ f(x, x)=0 \end{cases}$$

என்ருல், $f(x, y)$ ஆனது (0, 0) இடத்துத் தொடர்ச்சியின்மையாயுள்ளதென நிறுவுக.

(5) $\begin{cases} f(x, y)=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}, & x\neq y \\ f(x, y)=0, & x=y \end{cases}$

என்றால் $f(x, y)$ ஆனது $(0, 0)$ இடத்துத் தொடர்ச்சியின்மையா யுள்ளதென நிறுவுக.

9·10. தேற்றம் (வேண்டிய நிபந்தனை)

சார்பிலா மாறிகள் x, y-ஐப் பொறுத்த சார்பு f ஆனது (a, b) இடத்துத் தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டுவதற்கு நிபந்தனை யானது, "$f(x, b)$ என்றவாறு f ஆனது $x=a$ இடத்துத் தொடர்ச் சியாய் இருப்பதுடன், $f(a, y)$ என்றவாறு f ஆனது $y=b$ இடத் துத் தொடர்ச்சியாய் இருக்க வேண்டும்" என்பதே.

நிறுவல்

x, y-ஐப் பொறுத்த f ஆனது (a, b) இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் இருப்பதால், $\lim\limits_{(x,y)\to(a, b)} f(x, y)=f(a, b)$

அதாவது, $\varepsilon>0$க்கு, $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$

$\to |f(x, y)-f(a, b)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ என்றவாறு $\delta>0$-ஐக் காணலாம்.

வரையறை அரங்கத்துள் $(a-\delta, a+\delta)$ என்ற இடைவெளியில் (x_1, b), (x_2, b) என்றவாறு x_1, x_2 இரு புள்ளிகள் என்றால்,

$$\begin{aligned} |f(x_1, b)-f(x_2, b)| &= |\{f(x_1,b)-f(a,b)\}+\{f(a, b)-f(x_2,b)\}| \\ &\leq |f(x_1, b)-f(a, b)|+|f(x_2, b)-f(a, b)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\epsilon. \end{aligned}$$

$\therefore$ $|x-a|<\delta$-க்கு,

$|f(x, b)-f(a, b)|<\epsilon$,

$\therefore$ $x=a$ இடத்து, x-ஐ மட்டும் பொறுத்த f ஆனது தொடர்ச் சியாயுள்ளது. அதேபோல், வரையறை அரங்கத்துள் $(b-\delta, b+\delta)$ என்ற இடைவெளியில் (a, y_1) (a, y_2) என்றவாறு y_1, y_2 இரு புள்ளிகள் என்றால்

$|f(a, y_1)-f(a, y_2)|<\varepsilon$ என்று நிறுவலாம்.

$\therefore$ $|y-b|<\delta$ என்றால் $|f(a, y)-f(a, b)|<\varepsilon$

அதாவது, $y=b$ இடத்து y-ஐ மட்டும் பொறுத்த f சார்பு, ($f(a, y)$ என்றவாறு) ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

குறிப்பு

இத்தேற்றத்தின் நிபந்தனை போதியதல்ல. இதனை நிறுவ எதிர் உதாரணம் இதோ :

$$f(x, y)=0, \qquad x=0 \text{ அல்லது } y=0.$$

$$f(x, y)=1, \qquad x\neq 0, y\neq 0$$

என்றவாறு உள்ள f-ஐக் கருதுக.

$\varepsilon=1$ என்க.

இப்போது $f(x, 0)=f(a, 0)=0$ (கொடுத்துள்ளபடி)

$$|f(x, 0)-f(0, 0)|=0<\varepsilon$$

$\therefore$ $x=0$ இடத்து, $f(x, 0)$ என்றவாறுள்ள x-ஐ மட்டும் பொறுத்த சார்பானது தொடர்ச்சியானது.

இப்போது, $f(0, y)=0=f(0, 0)$

$$|f(0, y)-f(0, 0)|=0<\varepsilon$$

$\therefore$ $y=0$ இடத்து, $f(0, y)$ என்றவாறுள்ள y-ஐ மட்டும் பொறுத்த சார்பானது தொடர்ச்சியானது.

ஆனால் $|f(x, y)-f(0, 0)|=|1-0|=1=\varepsilon$.

அதாவது, $|f(x, y)-f(0, 0)|\nless\varepsilon$.

$\therefore$ $f(x, y)$ என்றவாறு f ஆனது $(0, 0)$ இடத்துத் தொடர்ச்சியானதல்ல.

$\therefore$ தேற்றத்தில் நிபந்தனை போதுமானதல்ல.

9·11. பகுதி வகைக்கெழுக்கள் (Partial Derivatives)

வரை இலக்கணம்

$u=f(x, y)$ என்க. f-ன் வரையறை அரங்கத்தின் யாதாமொரு புள்ளி (a, b) என்க.

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h, b)-f(a, b)}{h}\right]$$ இருக்கிறதென்றால், இந்த எல்லைக்கு (a, b) இடத்து, x-ஐ மட்டும் பொறுத்து நிலையான y-க்கு f-ன் பகுதி வகைக்கெழு என்று பெயர். இதனை $f_x(a, b)$ அல்லது $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b)$ என்று குறியிடுவர்.

அதே போல், $\lim_{k \to 0} \left[\frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \right]$ இருக்கிறது என்க.

இந்த எல்லைக்கு, (a, b) இடத்து, நிலையான x-க்கு y-ஐ மட்டும் பொறுத்து f-ன் வகைக்கெழு என்று பெயர். இதனை $f_y(a, b)$ அல்லது $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b)$ என்று குறியிடுவர்.

ஒருமாறிச் சார்பைப் போலல்லாமல், பலமாறிச் சார்புக்கு, வகைக்கெழு காணத்தக்கமைக்கு 'தொடர்ச்சி' அவசியமில்லை; வேண்டிய நிபந்தனையல்ல.

உதாரணமாக,

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \; x \text{ ஆவது}, y \text{ ஆவது பூச்சியமல்ல.}$$

$$= 0, \qquad x = 0, \; y = 0 \text{ என்க.}$$

ஏற்கனவே 9·9-ல் $f(x, y)$ ஆனது $(0, 0)$ இடத்துத் தொடர்ச்சி யாயில்லையென்று கண்டோம். ஆனாலும்,

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\frac{2h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} \right\}$$

$$= 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \left[\frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} \right] = \lim_{k \to 0} \left\{ \frac{\frac{2 \cdot 0k}{0^2 + k^2} - 0}{k} \right\}$$

$$= 0$$

$\therefore$ $(0, 0)$ இடத்து f-க்கு பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன.

மற்றொரு உதாரணம்

$$f(x, y) = 0, \qquad x \text{ ஆவது}, y \text{ ஆவது பூச்சியம்}$$

$$= 1, \qquad x \neq 0, \; y \neq 0$$

என்க. $\qquad \varepsilon = 1$ என்க.

$\therefore \; | f(x, y) - f(0, 0) | = | 0 - 1 | = 1 \nless \varepsilon$ என்பதால்,

f ஆனது $(0, 0)$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் இல்லை.

ஆனாலும்,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\left[\frac{f(0,\ 0+k)-f(0,0)}{k}\right] = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0$$

$\therefore$ (0, 0) இடத்து f-க்கு வகைக்கெழுக்கள் இருக்கின்றன.

பயிற்சி

(1) $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$

என்றால் $f(x, y)$ ஆனது (0, 0) இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது என்றும், பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உண்டென்றும் காண்பிக்க.

(**விடை** : $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0,0)}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$y = mx$ என்றால், $\lim_{x\to 0}\dfrac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \ \forall m$

$\therefore \lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$= f(0, 0)$ (கணக்கின்படி)

$\therefore f(x, y)$ ஆனது (0, 0) இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\dfrac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0}} - 0}{h}\right\}$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k\to 0}\left[\frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k}\right] = 0$$

$\therefore f_x(0,0),\ f_y(0, 0)$ இருக்கின்றன.)

(2) $f(x, y) = (xy)^{1/3}$ ஆனது (0, 0)-ஐத் தவிர xy-தளத்தின் எல்லாப் புள்ளிகளிடத்து வகைக்கெழு காணத்தக்கதென நிறுவுக.

(3) $\begin{cases} f(x, y)=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}, & x \neq y \\ f(x,y)=0. & x=y \end{cases}$

என்றால் $f_x(0,0)=f_y(0,0)$ என நிறுவுக.

(4) $\begin{cases} f(x, y)= \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x\text{-ம் } y\text{-ம் ஒருங்கே பூச்சியமல்ல,} \\ f(0,0)=0, \end{cases}$ என்றால் $f_x(x, 0)=0=f_y(0, y)$ என நிறுவுக.

9·12. தேற்றம்

f-ன் வரையறை அரங்கம் *D* என்க. *D*-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிடத்துப் "பகுதி வகைக்கெழுக்கள்" உண்டென்றும், இவை வரம்புள்ளவை யென்றும் கொண்டால், *D*-ன் உள் ஒவ்வொரு புள்ளியிடை *f* ஆனது தொடர்ச்சியாய் இருக்கும்.

நிறுவல்

f_x, f_y என்பவை *D*-ல் வரம்புள்ளவை

$\therefore$ *D*-ன் எல்லா x, y-க்கும்,

(i) ... $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| < M, \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| < M$ என்றவாறு ஒரு நேர் மாறிலி எண் உள்ளது.

(x, y) என்பது *D*-ன் யாதாமொரு புள்ளியெனின்,

$(x+h, y+k)$, $(x+h, y)$, $(x, y+k)$ என்ற புள்ளிகளும் *D*-ன் உள் இருக்குமாறு h, k என்ற நுண்எண்கள் இருக்கின்றன என்க.

$$\therefore \; f(x+h, y+k)-f(x, y)=[f(x+h, y+k) - f(x,y+k)] + [f(x, y+k)-f(x, y)]$$

$$=h\cdot \frac{\partial f(x+\theta_1 h, y+k)}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta_2 k)$$

$0<\theta_1<1, \quad 0<\theta_2<1$ (இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் வழி)

$\therefore |f(x+h, y+k)-f(x,y)| < M(|h| + |k|)$ (i)ன்படி

$\therefore$ $\varepsilon>0$-க்கு, ஒரு நேர் எண் η ஆனது,

$h^2+k^2 \leq \eta^2 \rightarrow |f(x+h, y+k)-f(x,y)|$ என்றவாறு உள்ளது.

$\therefore$ *f* ஆனது *D*-ன் எல்லாப் புள்ளிகளிடைத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது

9·13. வகையிடத் தக்கமையும், வகையீடுகளும் (Differentiability and Differentials)

$u=f(x, y)$ என்க.

$f(x, y)$ ஆனது முடிவுள்ளதென்றும், (x, y)-ன் அண்மையில் $f(x, y)$-ன் மதிப்பு உண்டென்றும், x, y-களின் சிறுமாறல்கள் முறையே δx, δy-க்கு ஒத்த u-ல் மாற்றம் δu ஆனது,

$$\text{(i)} \ldots \delta u=f(x+\delta x, y+\delta y)-f(x, y)=A\delta x+B\delta y+\delta x \cdot \varphi(\delta x,\delta y) + \delta y \cdot \psi(\delta x, \delta y)$$

என்றவாறு எழுதக் கூடுமானல், இங்கே மாறிலிகள் A, B என்பவை δx, δy-ஐச் சாராதவை என்றும், $\lim\limits_{(\delta x, \delta y)\to(0, 0)} \varphi(\delta x, \delta y)=0 = \lim\limits_{(\delta x, \delta y)\to(0, 0)} \psi(\delta x, \delta y)$ என்றும் இருந்தால், f ஆனது D-ன் (x, y) இடத்து வகையிடத் தக்கதென்போம்.

$A\delta x+B\delta y$-க்கு, (x, y) இடத்து f-ன் வகையீடு என்று பெயர்.

இதனை df என்றும் du என்றும் குறிப்பர்.

$$\text{(ii)} \ldots \therefore du=A\delta x+B\delta y$$

$$\therefore \delta u=du+\delta x \cdot \varphi(\delta x, \delta y)+\delta y \cdot \psi(\delta x, \delta y)$$

இப்போது y-ஐ நிலையாகக் கொண்டு, x-ஐ மாறியாகக் கொண்டால் (i) ஆனது

$$\delta u=A\delta x+\delta x \cdot \varphi(\delta x, 0) \qquad \text{ஏனெனில் } \delta y=0.$$

$$\therefore A=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta u}{\delta x} \text{ ஏனெனில், } \lim_{(\delta x,\delta y)\to(0, 0)} \varphi(\delta x,\delta y)=0$$

$\delta y=0$, (y நிலையானது)

இப்போது x-ஐ நிலையாகக் கொண்டு, y-ஐ மாறியாகக் கொண்டால்

$B=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ என நிறுவலாம்.

$\therefore$ (ii)-லிருந்து, $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\delta y.$

இது ஒரு முக்கியமான அடிப்படைத் தத்துவம்.

குறிப்பு

இதிலிருந்து பெறப்படுவது யாதெனின், f ஆனது (x, y) இடத்து வகையிடத்தக்கதாயின், f_x, f_y இருக்க வேண்டும். இது (x, y) இடத்து f-ன் வகையிடத் தக்கமைக்கு வேண்டிய நிபந் தனையே யன்றி, போதிய நிபந்தனை யல்ல.

9·14. தேற்றம்

x, y-ஐப் பொறுத்த சார்பு f-க்கு (x, y) இடத்துத் தொடர்ச்சி யுள்ள பகுதி வகைக்கெழுக்கள் இருக்கின்றன என்றால், f ஆனது அப்புள்ளியிடத்து வகையிடத் தக்கது.

நிறுவல்

$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ஆகியவை (x, y) இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ள வையாதலால், (x, y)-ன் அண்மையில் இவை இருக்கின்றன. இந்த அண்மையில், $(x+\delta x, y+\delta y)$ என்பது யாதானும் ஒரு புள்ளி யெனில்,

$$\text{(i)} \quad f(x+\delta x, y+\delta y)-f(x, y)=[f(x+\delta x, y+\delta y)-f(x, y+\delta y)]+[f(x, y+\delta y)-f(x, y)]$$

$f(x+\delta x, y+\delta y)-f(x, y+\delta y)$ என்ற வேறுபாட்டில் இரு உறுப்புகளிலுமே $y+\delta y$ வருவதால், (x, y)-ன் அண்மையில், $(x, x+\delta x)$ இடைவெளியில் ஒவ்வொரு x இடத்து f ஆனது x-ஐப் பொறுத்தமட்டும் வகைக்கெழு காணத்தக்கதெனக் கொள்ளலாம்.

∴ இவ் வேறுபாட்டிற்கு இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தினால்,

$$\text{(ii)} \quad f(x+\delta x, y+\delta y)-f(x, y+\delta y) = \delta x . \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 \cdot \delta x, \quad y+\delta y); \quad 0<\theta_1<1$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\partial}{\partial x}(x+\theta_1 \delta x, y+\delta y)-\frac{\partial}{\partial x}(x,y)=\varphi(\delta x,\delta y) \text{ என்றால்,}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x}$ ஆனது (x,y) இடத்துத் தொடர்ச்சியாயுள்ளதால்,

$$\lim_{(\delta x,\delta y)\to 0} \varphi(\delta x, \delta y)=0$$

அதேபோல்,

$$f(x, y+\delta y)-f(x, y)=\delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x, y+\theta_2 \cdot \delta y), \quad 0<\theta_2<1$$

(iv) $\frac{\partial}{\partial y}(x, y+\theta_2\delta y)-\frac{\partial}{\partial y}(x, y)=\psi(\delta y)$ என்றால்,

$\lim_{\delta\to 0} \psi(\delta y)=0$, $\because \frac{\partial}{\partial y}$ ஆனது (x, y) இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது.

$$\therefore \quad f(x+\delta x, y+\delta y)-f(x, y)$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\varphi(\delta x,\delta y)\right]\delta x+\left[\frac{\partial f}{\partial y}+\psi(\delta y)\right]\delta y$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right]+\delta x\varphi(\delta x,\delta y)+\delta y.\psi(\delta y)$$

$\therefore$ f ஆனது (x, y) இடத்து வகையிடத்தக்கது.

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}(x, y).\delta x+\frac{\partial}{\partial y}f(x, y).\,\delta y.$$

ஒரு குறிப்பு

ஒரு சார்பின் வகையிடத் தக்கமைக்கான நிபந்தனையை

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=Ah+Bk+\alpha_1 h+\alpha_2 k$$

என்ற வடிவில் எழுதலாம்.

இங்கே A-ம் B-ம், h, k-ஐப் பொறுத்ததல்ல; h, k ஆனவை 0-ஐ அணுக, α_1-ம், α_2-ம், 0-ஐ அணுகுகின்றன.

$$|\alpha_1 h+\alpha_2 k| \leq (|\alpha_1|+|\alpha_2|)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\leq \theta\sqrt{h^2+k^2} \quad \alpha_1, \alpha_2\to 0\to\theta\to 0$$

அதாவது, $\leq \theta\rho$ என்றால்,

மேற்கண்ட நிபந்தனையை

$f(x+h, y+k)-(fx, y)=Ah+Bk+\varepsilon\rho$, $\varepsilon\to 0$, $\rho\to 0$, என்ற வாறு எழுதலாம். மேலும், $|\rho|\sqrt{h^2+k^2}\leq|\rho|(|h|+|k|)$ என்பதால், ρ-க்குப் பதில் $|h|+|k|$ என்றெழுதலாம்.

9·15. வகைக்கெழு காணலில் இட மாற்றம் (Change in the Order of Derivation)

வரை இலக்கணம்

$\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ என்பவை (a, b) என்ற புள்ளியின் அண்மையில் இருந்தால்,

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(a+h,\ b)-\frac{\partial}{\partial x} f(a,\ b)}{h}\right\},$$

$$\lim_{k\to 0}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(a,\ b+k)-\frac{\partial}{\partial x} f(a,b)}{k}\right\},$$

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(a+h,b)-\frac{\partial}{\partial y} f(a,\ b)}{h}\right\},$$

$$\lim_{k\to 0}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(a,\ b+k)-\frac{\partial}{\partial y} f(a,b)}{k}\right\}$$

என்ற எல்லைகள் இருந்தால், இவற்றை முறையே,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b),\ \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(a,b),\ \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(a,b),\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a,b)$$

என்று குறியிடலாம்.

இப்போது, $\dfrac{\partial f}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y\,\partial x}$ என்ற சமன்பாடு எப்போதும் உண்மையல்ல. அதாவது ∂x-ஐயும் ∂y-ஐயும் பரிமாற்றம் செய்தால் வகைக்கெழுவின் மதிப்பு மாறலாம்.

இப்போது, வரை இலக்கணப்படி,

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x\,\partial y}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(a+h,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}\right\}$$

ஆனால் $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,\ b)=\lim\limits_{k\to 0}\left[\dfrac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}\right]$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{k\to 0}\left[\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\right]$$

$$\therefore\ \frac{\partial f(a,b)}{\partial x\,\partial y}$$

$$=\lim_{h\to 0}\ \lim_{k\to 0}\left[\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b-f(a,b+k)+f(a,b)}{hk}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\ \lim_{k\to 0}\ \frac{\varphi(h,k)}{hk}$$ என்க.

இதேபோல்,

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y\,\partial x}=\lim_{k\to 0}\ \lim_{h\to 0}\ \frac{\varphi(h,k)}{hk}$$

இங்கே இரட்டை எல்லை (Double Limit) காண்கிறோம்.

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x\,\partial y}\neq\frac{\partial f(a,b)}{\partial y\,\partial x}$ பொதுவாக, என்று ஒரு உதாரணத்தால் விளக்கலாம்.

உதாரணம்

$$f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2},\quad x\text{-ம் } y\text{-ம் ஒருங்கே } 0 \text{ அல்ல}$$

$$=0,\qquad x=0,\ y=0$$

என்க.

(i) இப்போது $\frac{\partial f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)}{h}\right\}$

இப்போது, $\frac{\partial}{\partial y}f(h,0)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h,0+k)-f(h,0)}{k}\right]$

$$=\lim_{k\to 0}\left[\frac{hk(h^2-k^2)}{k(h^2+k^2)}\right]=h$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=\lim_{k\to 0}\left[\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{0(0+k)(0^2-0+k^2)-0}{k}\right]$$

$$=0$$

$$\therefore \frac{\partial f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h-0}{h}\right] = 1$$

மேலும், $$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(0,0+k) - \frac{\partial}{\partial y}f(0,0)}{k}\right\}$$

ஆனால் $$\frac{\partial}{\partial x}f(0,k) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h,k)-f(0,k)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{hk\ (h^2+k^2)}{h\ (h^2+h^2)}\right] = -k$$

மேலும் $$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\frac{0}{h^2+0}-0}{h}\right\}$$

$$=0$$

$$\therefore \frac{\partial f(0,0)}{\partial y\ \partial x} = \lim_{k\to 0}\left(\frac{-k-0}{k}\right)$$

$$=-1$$

இப்போது நாம் கண்டவை

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x \partial y} = 1,\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y \partial x} = -1$$

$$\therefore \frac{\partial f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial f(0,0)}{\partial y \partial x}$$

குறிப்பு

இப்போது, இடமாற்றம் செய்யினும் வகைக்கெழுவில் மாற்றமில்லை யென்பதற்குப் போதிய நிபந்தனைகளை ஆராய்வோம்.

தேற்றம் 1

x, y-ப் பொறுத்த f-ன் வரையறை அரங்கம் D என்றும், D-ல் $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ இருக்கின்றன என்றும், D-ன் உள் இவை தொடர்ச்சியாய் இருக்கின்றன என்றும் கொண்டால்தான்

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

நிறுவல்

D-ன் உள் ஒரு புள்ளி (x,y) என்றும், D-ன் உள் $(x+h, y+k)$, $(x+h, y)$, $(x, y+k)$ என்ற புள்ளிகளும் இருக்குமாறு h, k என்பவை நுண்எண்கள் (infinitesimals) என்றும் கொள்க.

$$\Delta = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

$$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$$

$$\psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$$

என்றும் கொள்க.

$$\therefore \Delta = \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

$$= h\varphi'(x+\theta_1 h), \; 0<\theta_1<1 \text{ இடைமதிப்புத் தேற்றப்படி}$$

$$= h\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x+\theta_1 h, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 h, y)\right]$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ இருப்பதால், மறுபடியும் இடைமதிப்புத் தேற்றப்படி,

$$\Delta = h\left[k \frac{\partial^2 f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k)}{\partial y \partial x}\right] \quad 0<\theta_2<1$$

(i) $$= hk \frac{\partial^2 f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k)}{\partial y \partial x}$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ஆனது D-ல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால்,

$$\frac{\partial^2 f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} + \rho$$

$$\lim_{(h,k)\to 0} \rho = 0$$

$\therefore$ (i) ஆனது

$$\frac{\Delta}{hk} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} + \rho$$

$$\therefore \lim_{h\to 0, k-0} \frac{\Delta}{hk} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

இதேபோல்

$$\lim_{h\to 0,\ k\to 0} \frac{\Delta}{hk} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

என நிறுவலாம்.

$$\therefore\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

தேற்றம் 2: "யங்" தேற்றம் (Young's theorem)

x, y-ஐப் பொறுத்த சார்பு f-ன் வரையறை அரங்கம் D-ல், $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ இருக்கிறதென்றும், $\frac{\partial}{\partial x}$-ம், $\frac{\partial}{\partial y}$-ம் வகையிடத் தக்கவை என்றும் கொண்டால், **D-யினுள்** $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$.

நிறுவல்

(x, y) என்பது D யினுள் ஒரு புள்ளி என்றும், $(x+h, y+k)$, $(x+h, y)$, $(x, y+k)$ என்பவை D-யினுள் புள்ளிகள் என்றவாறு h, k என்பவை நுண்எண்கள் என்றும் கொள்க.

$$\begin{cases} \Delta = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y) \\ \varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y) \\ \psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y) \end{cases}$$

என்று கொள்க.

இப்போது,

$$\Delta = \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

$$= h\varphi'(x+\theta h), \quad 0<\theta<1 \text{ இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் வழி.}$$

$$\text{(i)} \quad = h\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x+\theta h, y+k) - \frac{\partial x}{\partial} f(x+\theta h, y)\right]$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$-ம், $\frac{\partial f}{\partial y}$ம் வகையிடத்தக்கவை யென்பதால்

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+\theta h\ y+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \theta h \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$+ k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \epsilon\rho,$$

$$\rho = |\theta h| + |k|, \qquad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \therefore \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \theta h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$+k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \varepsilon \rho,$$

நிலையான y-க்கு

$$\text{(iii)} \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \theta h \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \varepsilon' |\theta h|$$

(ii)—(iii) கொடுப்பது,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+\theta h, y+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(x+\theta h, y) = k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$+ \varepsilon \rho - \varepsilon' |\theta h|$$

அதாவது,

$$\Delta = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + h(\varepsilon \rho - \epsilon' |\theta h|)$$

அதாவது

$$\frac{\Delta}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{k}(\varepsilon \rho - \varepsilon' |\theta h|)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 0(k)$$

இதேபோல், $\psi(y)$-க்கும்

$$\frac{\Delta}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 0(h)$$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 0(k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 0(h)$$

$\therefore$ h-ம், k-ம் 0-ஐ அணுக, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்
(Bibliography)

1. Bromwich : *Infinite Series*
2. Knopp : *Infinite Series*
3. Phillips : *A Course of Analysis*
4. Taylor : *Theory of Functions*

கலைச்சொற்கள்

A

Abel's theorem — அபெல் தேற்றம்
Absolute value — தனிப் பெறுமானம்
Absolutely convergent series — அற ஒருங்குத் தொடர்
Accumulation point — திரட்சிப் புள்ளி
Alternating Series — ஆடல் தொடர்
Archimedean law — ஆர்கிமிடீயன் விதி
Arithmetic continuum — எண்கணிதத் தொடரகம்

B

Bernouilli's inequality — பெர்னோலியின் சமனின்மை
Bolzano-Weierstrass theorem — பொல்ஸானோ - வையெர்ஸ்ட்ராஸ் தேற்றம்
Bound — வரம்பு
Bounded set — வரம்புள்ள கணம்
Bounded sequence — வரம்புள்ள ஒழுங்கு வரிசை
Bounded variation — வரம்புள்ள மாறல்
Bounds of a function — ஒரு சார்பின் வரம்புகள்
Bounded function — வரம்புள்ள சார்பு, வரம்புடை சார்பு

C

Cauchy's condensation test — கோஷியின் ஒடுக்கல் சோதனை
Cauchy's general principle of convergence — கோஷியின் ஒருங்கல் பொது விதி
Cauchy's Root Test — கோஷியின் மூலச்சோதனை
Chain Rule — சங்கிலி விதி
Closed interval — மூடிய இடைவெளி
Closed set — மூடிய கணம்
Comparison test — ஒப்பீட்டுச் சோதனை
Completeness axiom — முழுமை உண்மை
Conditionally convergent series — நிபந்தனை ஒருங்குத் தொடர்
Continuity at a point — ஒரு புள்ளியிடைத் தொடர்ச்சி
Continuity in an interval — ஒரு இடைவெளியில் தொடர்ச்சி

Continuous functions — தொடர்ச்சியாய் உள்ள சார்பு
Continuum — தொடரகம் [கள்
Convergence — ஒருங்கல்
Convergent Series — ஒருங்கும் தொடர்

D

D'Alembert's Ratio Test — தலம்பேரின் விகித சோதனை
Darboux's Theorem — தார்பூவின் தேற்றம்
Decreasing function — இறங்கும் (குறையும்) சார்பு
Dedekind cut, section — டெடெகின்டின் வெட்டு
Dedekind's theorem — டெடெகின்டின் தேற்றம்
Deleted neighbourhood — புள்ளிநீக்கிய அண்மை, ஓட்டை அண்மை
de Morgan - Bertrand's Test — தமோர்கன் - பெர்ட்ராண்ட் சோதனை
Derivability — வகைக்கெழு காணத்தக்கமை
Derivative — வகைக்கெழு
Differentiability — வகையிடத்தக்கமை
Differential — வகையீட்டு நுண்ணெண்
Dirichlet's Test — டிரிஷ்லே சோதனை
Discontinuous function — தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
Divergence — விரிதல்
Divergent sequence — விரியும் ஒழுங்கு வரிசை
Divergent series — விரியும் முடிவில்லாத் தொடர்
Domain — அரங்கம்

K

Kummer's Test — கும்மரின் சோதனை

L

Lagrange's remainder — லாக்ராஞ்சியின் மீதி
L'Hospital's Rule — லோபிதாவின் விதி
Limit point — எல்லைப் புள்ளி
Linear continuum — நேர்கோட்டுத் தொடரகம்
Lipschitz condition — லிப்ஷிட்ஸின் நிபந்தனை

M

Maclaurin's series — மெக்ளாரின் தொடர்
Maxima — மீப்பெருமங்கள்
Mean value theorem — இடைமதிப்புத் தேற்றம்

Minima	—	மீச்சிறுமங்கள்
Monotonic functions	—	ஓரியல்புச் சார்புகள்
Monotonic sequences	—	ஓரியல்பு ஒழுங்கு வரிசைகள்

N

Neighbourhood	—	அண்மை
Nested interval	—	இடைவெளிக் கூடு
Null sequence	—	பூச்சிய ஒழுங்கு வரிசை

O

Odd function	—	ஒற்றைச் சார்பு
Oscillation	—	ஆடல்

P

Partial differentiation	—	பகுதி வகையிடல்
Power Series	—	அடுக்குத் தொடர்
Pringsheim's theorem	—	ப்ரிங்ஷைமின் தேற்றம்

R

Raabe's test	—	ராபெயின் தேற்றம்
Radius of convergence	—	ஒருங்கல் ஆரை
Removable discontinuity	—	நீங்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை
Rolle's theorem	—	ரோல்ஸ் தேற்றம்

S

Schlomilch-Roche remainder	—	ஷ்லோமில்ஃ-ரோஃக் தேற்றம்

U

Uniform continuity	—	சீரான தொடர்ச்சி

Y

Young's theorem	—	யங்கின் தேற்றம்